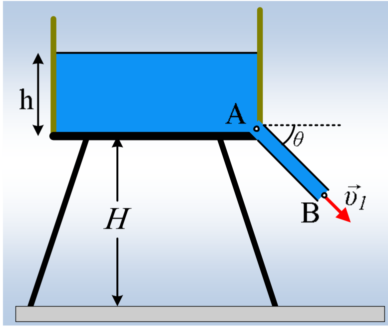
Η πίεση στο σωλήνα και η σπηλαίωση.



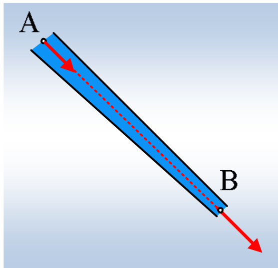
Στο σχήμα βλέπετε ένα υπερυψωμένο μεγάλο ντεπόζιτο, σε ύψος H=10,8m από το έδαφος, το οποίο περιέχει νερό σε ύψος h=2m, στη βάση του οποίου έχει συνδεθεί ένας σωλήνας ΑΒ, μήκους l=6m και διατομής A=21cm^2, ο οποίος σχηματίζει γωνία θ=30° με την οριζόντια διεύθυνση.

i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα εκροής του νερού από το άκρο Β του σωλήνα, καθώς και η παροχή του σωλήνα.

ii) Πόση είναι η πίεση στην είσοδο Α του σωλήνα;

Αν η πίεση σε κάποια περιοχή στο εσωτερικό του σωλήνα μηδενιστεί, τότε στην περιοχή αυτή εμφανίζονται φυσαλίδες και το φαινόμενο ονομάζεται σπηλαίωση.

iii) Ποιο είναι το μέγιστο μήκος του σωλήνα, ώστε να μην εμφανιστούν φαινόμενα σπηλαίωσης στο εσωτερικό του;



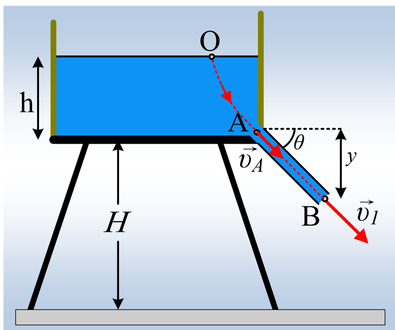
iv) Θέλουμε ο σωλήνας να φτάσει στο έδαφος. Για να μην εμφανιστούν φαινόμενα σπηλαίωσης προτείνεται να αλλάξουμε τη διατομή του σωλήνα, ώστε στο άκρο Α να έχουμε εμβαδόν διατομής A_1=24cm^2.

α) Πώς θα μεταβάλλει αυτό την παροχή του σωλήνα;

β) Ποια θα είναι τώρα η τιμή της πίεσης στο άκρο Α του σωλήνα;

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}$=10^{5}Pa, g=10m/s^2, η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m^3, ενώ οι ροές να θεωρηθούν μόνιμες και στρωτές ροές ιδανικού ρευστού.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχει χαραχτεί μια ρευματική γραμμή κατά μήκος της οποίας εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli από την επιφάνεια (σημείο Ο), μέχρι την έξοδο σημείο Β, θα έχουμε:

$$p_O + \rho g(h+y) + \frac{1}{2}\rho\upsilon_O^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$$

Θεωρώντας αμελητέα την ταχύτητα στο Ο (υ_O=0) , αφού η δεξαμενή θεωρείται μεγάλης επιφάνειας, ενώ p_O=p_B=$p_{ατ}$ και y=l·ημθ, έχουμε:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h+\ell\cdot\eta\mu\theta)} \rightarrow$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2g(h+\ell\cdot\eta\mu\theta)} = \sqrt{2\cdot 10(2+6\cdot 0{,}5)}\,m/s = 10m/s$$

Ενώ η παροχή μέσω του σωλήνα θα είναι ίση με:

$$\Pi_1 = A\cdot\upsilon_1 = 21\cdot 10^{-4}m^2\cdot 10m/s = 0{,}021m^3/s = 21\ L/s.$$

ii) Παίρνουμε ξανά την εξίσωση Bernoulli, από το Α στο Β:

$$p_A + \rho g y + \frac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2$$

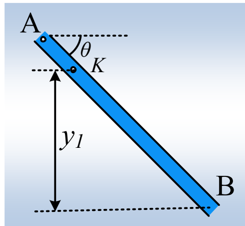
Όμως ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή, οπότε $\upsilon_A=\upsilon_1$, (αφού $\Pi_A=\Pi_B \to A\cdot\upsilon_A=A\cdot\upsilon_B$), έτσι:

$$p_A + \rho g \cdot \ell \cdot \eta\mu\theta = p_{\alpha\tau} \to (1)$$

$$p_A = p_{\alpha\tau} - \rho g \cdot \ell \cdot \eta\mu\theta \to$$

$$p_A = 10^5 \mathrm{P\alpha} - 1.000 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} P\alpha = 70.000 P\alpha$$

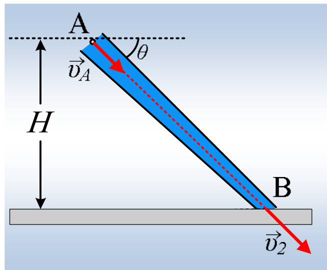
iii) Για να δημιουργηθούν φαινόμενα σπηλαίωσης, θα πρέπει σε κάποιο σημείο Κ στο εσωτερικό του σωλήνα, που θα βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση y_1 από το άκρο Β, η πίεση να γίνει πολύ μικρή ή ισοδύναμα πρακτικά να μηδενιστεί. Αλλά τότε από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ Κ και Β, εφαρμόζοντας την σχέση (1), θα είχαμε:



$$p_K + \rho g \cdot y_1 = p_{\alpha\tau} \to y_1 = \frac{p_{\alpha\tau}}{\rho g} = \frac{10^5}{1.000\cdot 10} m = 10m$$

Αλλά τότε, για να μην έχουμε σπηλαίωση, ο σωλήνας θα πρέπει να έχει μήκος **μικρότερο** από ℓ_1, όπου $\ell_1 = \frac{y_1}{\eta\mu\theta} = \frac{10}{1/2} m = 20m$ οπότε τότε δεν θα έχουμε σπηλαίωση, ούτε στο άκρο Α του σωλήνα.

iv) Με βάση το προηγούμενο ερώτημα, αν ο σωλήνας φτάσει στο έδαφος, αφού το ύψος είναι Η=10,8m, ο σωλήνας θα έχει μήκος 21,6m και θα εμφανιστούν φαινόμενα σπηλαίωσης, οπότε θα υπάρχει και καταστροφή της μόνιμης ροής που μελετάμε. Αν όμως ο σωλήνας δεν είναι κυλινδρικού σχήματος, αλλά έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος, τότε η κατάσταση θα έχει αλλάξει. Ας την δούμε:



α) Εφαρμόζουμε ξανά εξίσωση Bernoulli από το Ο στο άκρο Β:

$$p_O + \rho g(h+H) + \frac{1}{2}\rho \upsilon_O^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \to$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(h+H)} = \sqrt{2\cdot 10 \cdot (2+10{,}8)} m/s = 16 m/s$$

Αλλά τότε η παροχή του σωλήνα, στο άκρο Β με διατομή $A=21cm^2$, θα είναι ίση:

$$\Pi_2 = A\cdot\upsilon_2 = 21\cdot 10^{-4}\cdot 16\ m^3/s = 33{,}6\cdot 10^{-3} m^3/s = 33{,}6\ L/s.$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι:

ναι μεν έχουμε αύξηση της παροχής, σε σχέση με την τιμή που βρήκαμε στο i) ερώτημα, αλλά αυτή η αύξηση οφείλεται στην αύξηση του ύψους και όχι στο «πλάτεμα» του σωλήνα στο άκρο Α!!!.

β) Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των διατομών στα δυο άκρα του σωλήνα, παίρνουμε:

$$A_1\cdot\upsilon_A = A\cdot\upsilon_2 \to \upsilon_A = \upsilon_2 \frac{A}{A_1} = 16\frac{21}{24}\ m/s = 14 m/s$$

Οπότε εφαρμόζοντας την εξίσωση Bernoulli από το Ο στο Α (ή από το Α στο Β, όπως κάναμε στο ii) ερώτημα) παίρνουμε:

$$p_O + \rho g h + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_O^2 = p_A + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 \rightarrow$$

$$p_A = p_{\alpha\tau} + \rho g h - \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_A^2 \rightarrow$$

$$p_A = 10^5\text{Pα} + 1.000 \cdot 10 \cdot 2\ \text{Pα} - \frac{1}{2}1.000 \cdot 14^2 P\alpha = 22.000 P\alpha$$

dmargaris@gmail.com