ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΑ ΤΡΕΧΟΝΤΑ ΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

1. Αν γνωρίζουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης ενός αρμονικού κύματος μπορούμε να βρούμε την εξίσωσης της ταχύτητας και της επιτάχυνσης λόγω αρμονικής ταλάντωσης των σημείων του.

Πράγματι η εξίσωση $y=A\cdot ημ2π\left(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{λ}\right)$ είναι εξίσωση ταλάντωσης για κάθε σημείο x. Άρα, θα ισχύουν και οι σχέσεις:

$$\boxed{u=ω\cdot A\ συν2π\left(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{λ}\right)}$$

και

$$\boxed{α=-ω^{2}\cdot A\ ημ2π\left(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{λ}\right)}$$

2. Κάθε υλικό σημείο του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται ένα κύμα, από τη στιγμή που έχει αρχίσει να ταλαντώνεται εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους Α, και ισχύουν όσα ξέρουμε για την αρμονική ταλάντωση.

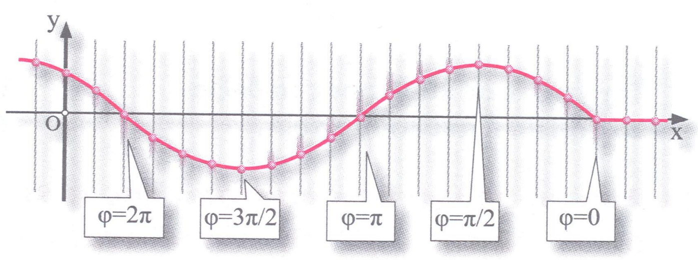
Για να βρούμε την ταχύτητα ταλάντωσης u, όταν γνωρίζουμε την απομάκρυνση y, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε.Τ. για την ταλάντωση του σημείου.
Από την εφαρμογή της Α.Δ.Ε.Τ. έχουμε:

$$K+U=E\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}mu^2+\frac{1}{2}Dy^2=\frac{1}{2}DA^2\ \Rightarrow\ mu^2+mω^2y^2=mω^2A^2\ \Rightarrow\ u^2=ω^2(A^2-y^2)$$

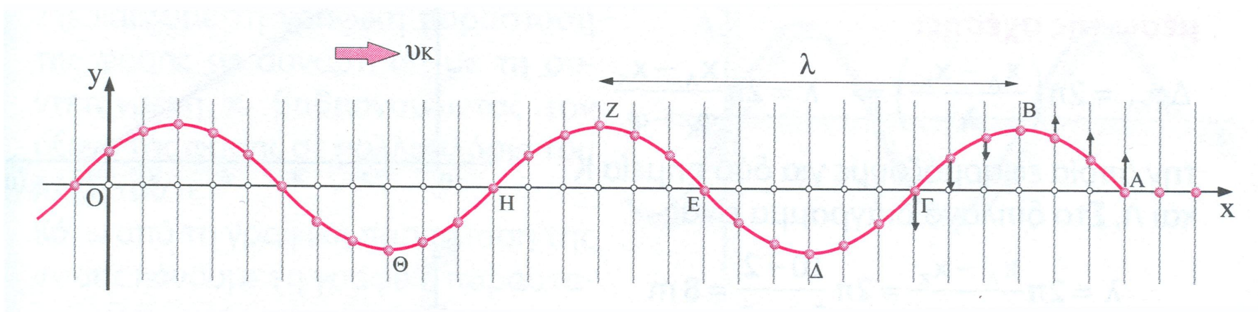
$$\Rightarrow \boxed{u=\pm ω\sqrt{A^2-y^2}}$$

3. Κάθε χρονική στιγμή τα σημεία ενός κύματος έχουν διαφορετικές φάσεις λόγω ταλάντωσης.

Μηδενική φάση έχει το σημείο που εκείνη τη χρονική στιγμή αρχίζει να ταλαντώνεται λόγω του κύματος που φθάνει σε αυτό το σημείο. Εάν θεωρήσουμε κύμα που διαδίδεται προς τα θετικά του άξονα x'x, **κάθε σημείο που βρίσκεται λ/4 αριστερά του σημείου στο οποίο έχει φθάσει το κύμα, η φάση του αυξάνεται κατά π/2 rad.**



Ας προσέξουμε το παρακάτω στιγμιότυπο κύματος.



Το **σημείο Α** έχει φάση $\varphi_A=0$ και αρχίζει ταλάντωση με θετική φορά προς τα πάνω.

Το **σημείο Β** έχει φάση $\varphi_B=\pi/2$ rad και βρίσκεται για πρώτη φορά σε y=+A.

Το **σημείο Γ** έχει φάση $\varphi_\Gamma=\pi$ rad και διέρχεται από την Θ.Ι. για πρώτη φορά με $u=-u_{max}$.

Το **σημείο Δ** έχει φάση $\varphi_\Delta=3\pi/2$ rad και βρίσκεται για πρώτη φορά σε y=-A.

Το **σημείο Ε** έχει φάση $\varphi_E=2\pi$ rad και έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση.

Το **σημείο Ζ** έχει φάση $\varphi_Z=2\pi+\pi/2$ rad και βρίσκεται για δεύτερη φορά σε y=+A.

4. Πώς σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο ενός κύματος μια χρονική στιγμή t_1

Ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία
1º Βήμα: Θέτουμε στην εξίσωση του κύματος όπου $t=t_1$ για να βρούμε την εξίσωση y=f(x) της οποίας τη γραφική παράσταση θέλουμε να σχεδιάσουμε.

2º Βήμα: Βρίσκουμε πόσο μακριά έχει φτάσει από την αρχή O(x=0) το κύμα και συγκρίνουμε την απόσταση αυτή που βρήκαμε με το μήκος κύματος.
Ο πιο ασφαλής τρόπος για να βρούμε πόσο μακριά έχει φτάσει το κύμα την χρονική στιγμή $t=t_1$ είναι **να μηδενίσουμε τη φάση του κύματος,** αν τα μόρια ξεκινούν να κινούνται από τη θέση ισορροπίας τους με φορά προς τα πάνω ή **να θέσουμε τη φάση ίση με π rad**, αν τα μόρια ξεκινούν να κινούνται από τη θέση ισορροπίας τους με φορά προς τα κάτω.

Διαφορετικά, εάν έχουμε κύμα χωρίς αρχική φάση εφαρμόζουμε τη σχέση $x_1=u_\delta \cdot t_1$, ενώ εάν πρόκειται για κύμα με αρχική φάση εφαρμόζουμε την σχέση $x=x_o+u_\delta \cdot t_1$, όπου x_o είναι η συντεταγμένη του σημείου του ελαστικού μέσου στο οποίο βρίσκεται το κύμα την χρονική στιγμή t=0.

3º Βήμα: Βρίσκουμε την απομάκρυνση y του σημείου O(x=0) τη χρονική στιγμή t_1 θέτοντας στην εξίσωση που βρήκαμε στο 1º βήμα όπου x=0.

4º Βήμα: Βρίσκουμε την απομάκρυνση y του σημείου που βρίσκεται στη θέση $x=+\frac{\lambda}{4}$ τη χρονική στιγμή t_1 θέτοντας στην εξίσωση που βρήκαμε στο 1º βήμα όπου $x=+\frac{\lambda}{4}$.

5º Βήμα: Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο ξεκινώντας τη γραφική παράσταση από την αρχή O(x=0).

Εφαρμογή

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα με εξίσωση y=0,4ημ2π(2t-10x) (S.I.) διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x'Ox. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπο του κύματος, στο θετικό ημιάξονα, τη χρονική στιγμή t_1=1,25s.

Λύση

Το μήκος κύματος είναι:

$$\frac{x}{\lambda} = 10x \Rightarrow \lambda = 0{,}1m$$

Βρίσκουμε μέχρι ποιο σημείο έχει φτάσει το κύμα τη χρονική στιγμή t_1=1,25s θέτοντας στην φάση του κύματος φ=2π(2t-10x) όπου φ=0 και t=t_1=1,25s.

$$2\pi(2\cdot 1{,}25-10x)=0 \Rightarrow 2{,}5x-10x=0 \Rightarrow x=0{,}25m=2\lambda+\frac{\lambda}{2}$$

Επομένως πρέπει να φτιάξουμε για το θετικό ημιάξονα Ox τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$y_{x,t1}=0{,}4ημ(5\pi-20\pi x) \text{ για } O\leq x\leq +0{,}25m \quad (1)$$

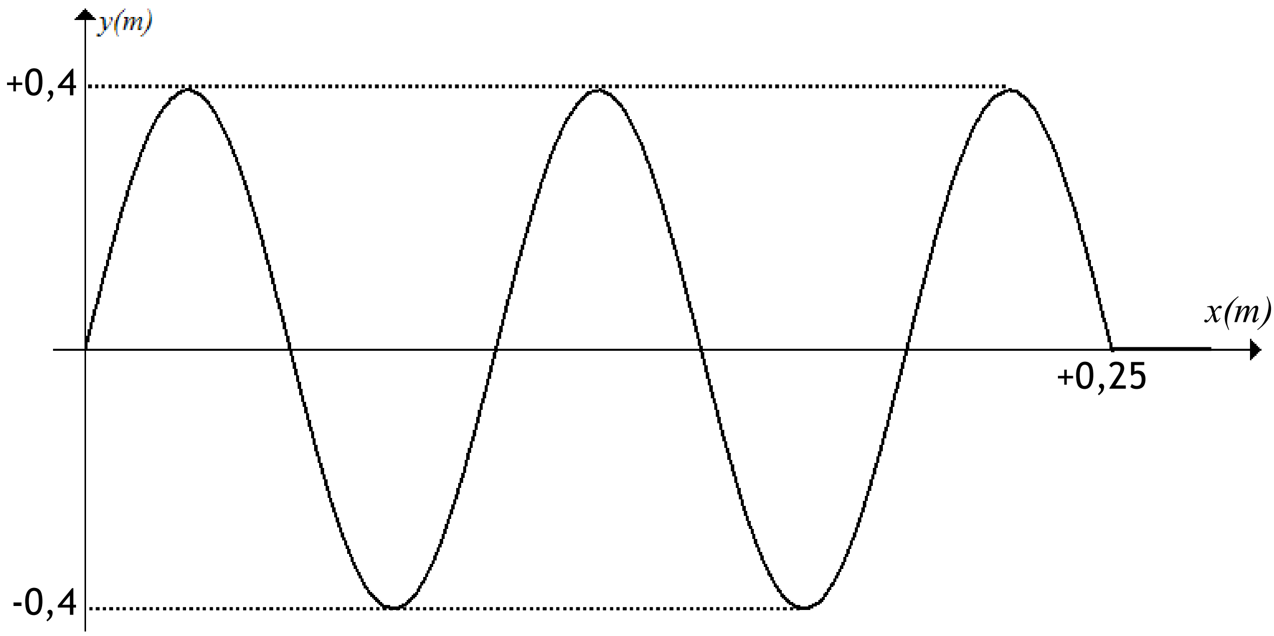
Θέτοντας στην εξίσωση (1) όπου x=0 βρίσκουμε την απομάκρυνση του υλικού σημείου O(x=0) από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1:

$$y_{O,t1}=0{,}4ημ5\pi=0$$

Ενώ θέτοντας στην εξίσωση (1) όπου x=+λ/4=+0,025m βρίσκουμε την απομάκρυνση του υλικού σημείου x=+λ/4 από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1:

$$y_{(x=+\lambda/4)}=0{,}4ημ(5\pi-0{,}5\pi)=0{,}4ημ4{,}5\pi=0{,}4ημ(4\pi+\pi/2)=+0{,}4m$$

Με βάση τα δεδομένα αυτά το στιγμιότυπο του κύματος φαίνεται στο σχήμα.



5. Προσδιορισμός της κατεύθυνσης κίνησης ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου κατά μήκος του οποίου διαδίδεται εγκάρσιο αρμονικό κύμα.

1ος τρόπος: *(με τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης)*
Ένας τρόπος να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση κίνησης ενός υλικού σημείου του ελαστικού μέσου μία χρονική στιγμή t_1 είναι να υπολογίσουμε την ταχύτητα ταλάντωσής του την χρονική στιγμή t_1.
Συγκεκριμένα, για κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική φορά του άξονα x'x, η εξίσωση αρμονικού κύματος είναι:

$$y = A\,\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Έτσι, η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης ενός υλικού σημείου Κ που βρίσκεται στη θέση x_K, είναι:

$$u_K = \omega \cdot A\,\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_K}{\lambda}\right)$$

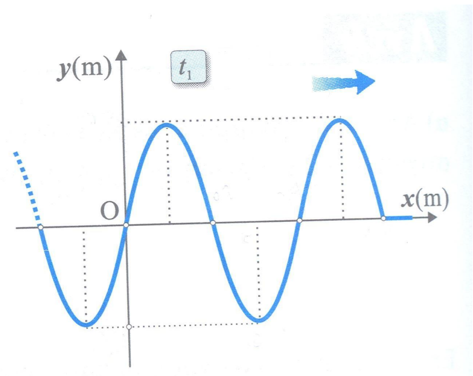
Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση όπου $t=t_1$, υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

- ✓ Εάν $u_{K(t1)} > 0$, το υλικό σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1 **κινείται προς τη θέση της μέγιστης θετικής του απομάκρυνσης (προς τα πάνω).**
- ✓ Εάν $u_{K(t1)} < 0$, το υλικό σημείο Κ τη χρονική στιγμή t_1 **κινείται προς τη θέση της μέγιστης αρνητικής του απομάκρυνσης (προς τα κάτω).**

2ος τρόπος: *(με τη βοήθεια του στιγμιότυπου)*

Εάν δίνεται το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t_1 και ζητείται η φορά ταλάντωσης ενός υλικού σημείου Κ τη χρονική αυτή στιγμή, τότε, γνωρίζοντας τη φορά διάδοσης του κύματος, μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα νέο στιγμιότυπο μια χρονική στιγμή t_1+dt. Αυτό γίνεται πρακτικά μετατοπίζοντας το δοθέν στιγμιότυπο λίγο προς τα δεξιά (εάν η φορά διάδοσης του κύματος είναι προς τη θετική κατεύθυνση) ή προς τ' αριστερά (εάν η φορά διάδοσης του κύματος είναι προς τη αρνητική κατεύθυνση). Από το νέο αυτό στιγμιότυπο μπορούμε να δουμε εάν το υλικό σημείο Κ βρίσκεται σε μία θέση y πιο πάνω ή πιο κάτω από αυτή που βρισκόταν τη χρονική στιγμή t_1.

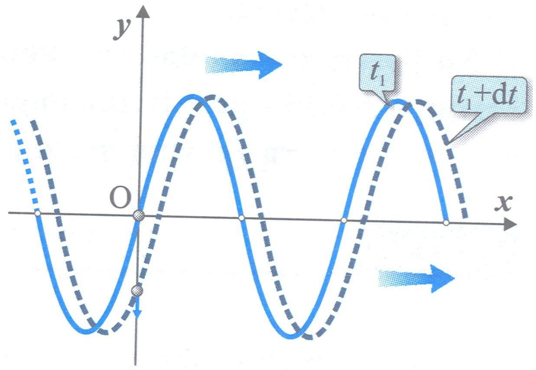
Εφαρμογή:
Στο διπλανό διάγραμμα φαίνεται το στιγμιότυπο ενός αρμονικού κύματος τη χρονική στιγμή t_1. Το κύμα αυτό διαδίδεται σε γραμμικό ελαστικό μέσο το οποίο ταυτίζεται με τον άξονα x'x, προς τη θετική φορά του άξονα. Να βρείτε την κατεύθυνση κίνησης του υλικού σημείου Ο τη χρονική στιγμή που απεικονίζεται στο στιγμιότυπο.



Λύση:

1ος τρόπος

Αφού γνωρίζουμε ότι το κύμα διαδίδεται προς τη θετική φορά του άξονα, μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα νέο στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή t_1+dt, μετατοπίζοντας το δοθέν στιγμιότυπο **προς τα δεξιά**, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Από το νέο στιγμιότυπο προκύπτει ότι το υλικό σημείο Ο τη χρονική στιγμή t_1+dt βρίσκεται σε μια θέση πιο κάτω από αυτή που βρισκόταν τη χρονική στιγμή t_1. Συνεπώς το υλικό σημείο Ο τη χρονική στιγμή t_1 **κινείται με φορά προς τα κάτω.**

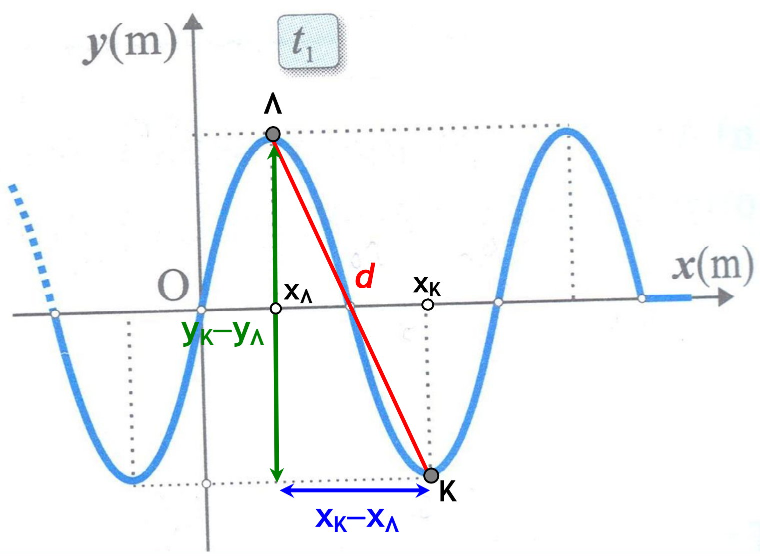
2ος τρόπος

Αφού το κύμα διαδίδεται προς τα δεξιά, η κοιλάδα που βρίσκεται αριστερά του σημείου Ο(x=0) προχωρεί και αυτή προς τα δεξιά, οπότε μετά από λίγο φτάνει και αυτή στο σημείο Ο, με αποτέλεσμα το υλικό σημείο του ελαστικού μέσου να βρεθεί στην κάτω ακραία θέση. Αυτό σημαίνει ότι το υλικό σημείο Οx=0) τη χρονική στιγμή t_1 **κινείται με φορά προς τα κάτω.**

6. Υπολογισμός της απόστασης μεταξύ δύο υλικών σημείων του ελαστικού μέσου σε δεδομένη χρονική στιγμή

Εάν ζητείται η απομάκρυνση δύο υλικών σημείων Κ και Λ του ελαστικού μέσου δεδομένη χρονική στιγμή t_1, τότε θα πρέπει να υπολογίσουμε την απομάκρυνση y_K και y_Λ από τη θέση ισορροπίας του κάθε σημείου του ελαστικού μέσου τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η απόσταση d των δύο υλικών σημείων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\mathbf{d} = \sqrt{(\mathbf{x_K} - \mathbf{x_\Lambda})^2 + (\mathbf{y_K} - \mathbf{y_\Lambda})^2}$$



7. Πρέπει να διακρίνουμε την ταχύτητα ταλάντωσης(u_τ) κάθε υλικού σημείου του μέσου διάδοσης από την ταχύτητα διάδοσης του κύματος(u_δ), δηλαδή την ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η διαταραχή.

Η **ταχύτητα διάδοσης (u_δ)** του κύματος σε ορισμένο ελαστικό μέσο είναι σταθερή, εξαρτάται από το είδος του κύματος και τις ιδιότητες του μέσου και υπολογίζεται:

- ✓ Εάν γνωρίζουμε την απόσταση Δx που έχει διατρέξει το κύμα κατά μήκος του ελαστικού μέσου σε ορισμένη χρονική διάρκεια Δt:

$$\mathbf{u_\delta = \frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

- ✓ Με εφαρμογή του θεμελιώδους νόμου της κυματικής:

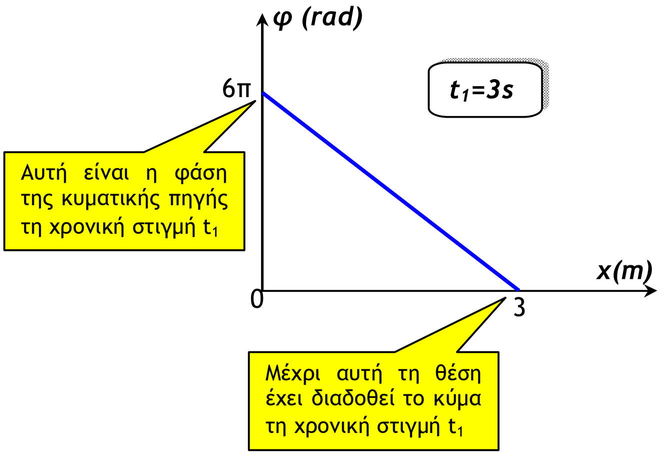
$$\mathbf{u_\delta = \lambda \cdot f}$$

Η **ταχύτητα ταλάντωσης (u_τ)** κάθε υλικού σημείου μεταβάλλεται με το χρόνο και μάλιστα αποκτά τη μέγιστη κατά μέτρο(κατ’ απόλυτη τιμή) τιμή της όταν το υλικό σημείο διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του. Για κύμα που διαδίδεται κατά τη θετική κατεύθυνση, η εξίσωση ταλάντωσης έχει εξίσωση:

$$\mathbf{u_\tau = \omega A \sigma \upsilon \nu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)}$$

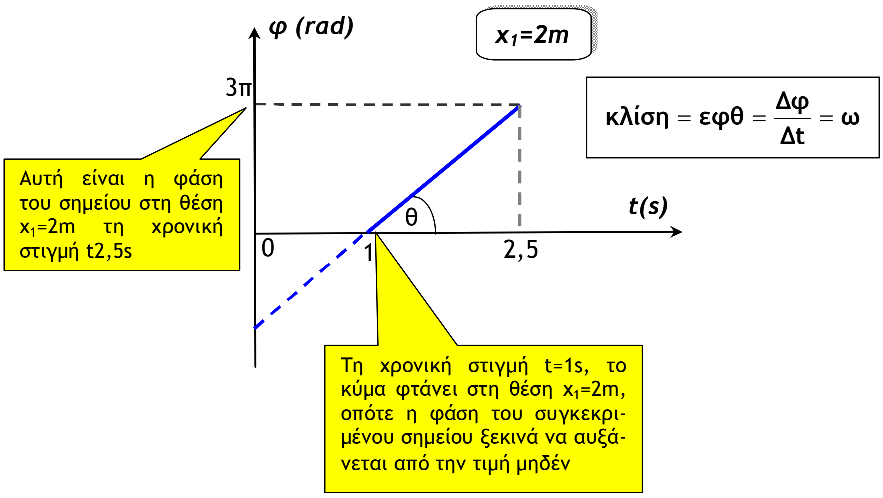
8. Από τη μελέτη των γραφικών παραστάσεων φ=f(x) (φάση συναρτήσει της θέσης μιας χρονική στιγμή t_1) και φ=f(t) (φάση συναρτήσει του χρόνου για ένα σημείο στη θέση x_1) μπορούν να υπολογιστούν ορισμένα χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος.

α. Γραφική παράσταση φ=f(x) μια χρονική στιγμή t_1



- Για t_1=3s, x=0, $\varphi_{\pi\eta\gamma}$=6π rad: $\varphi_{\pi\eta\gamma} = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \cancelto{0}{\frac{x}{\lambda}}\right) \Rightarrow \mathbf{6\pi} = \frac{2\pi \cdot \mathbf{3}}{T} \Rightarrow T = 1s$
- Για t_1=3s, x=3m, φ=0 rad: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow \mathbf{0} = 2\pi\left(\frac{\mathbf{3}}{T} - \frac{\mathbf{3}}{\lambda}\right) \Rightarrow \lambda = \ldots$

β. Γραφική παράσταση φ=f(t) για ένα σημείο στη θέση x_1



- Για t=1s, φ=0 rad, x_1=2m: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow 0 = 2\pi\left(\frac{1}{T} - \frac{2}{\lambda}\right) \Rightarrow \ldots$
- Για t=2,5s, φ=3π rad, x_1=2m: $\varphi = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \Rightarrow 3\pi = 2\pi\left(\frac{2{,}5}{T} - \frac{2}{\lambda}\right) \Rightarrow \ldots$

Όπως φαίνεται παραπάνω, προκύπτουν δύο εξισώσεις με τα λ και Τ, οπότε από την επίλυση του συστήματος των δύο μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος κύματος λ και την περίοδο ταλάντωσης Τ. Επίσης, από την κλίση της γραφικής παράστασης μπορούμε να υπολογίσουμε την κυκλική συχνότητα ω.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΗΝ ΣΥΜΒΟΛΗ ΚΥΜΑΤΩΝ

☛ **9.** Όταν μας ζητούν το πλάτος της συνιστάμενης ταλάντωσης, τότε ισχύει:

$$|A'| = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu\pi\frac{(r_1 - r_2)}{\lambda}\right|$$

ενώ για την απομάκρυνση ισχύει:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\pi\frac{(r_1 - r_2)}{\lambda} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2\lambda}\right) \text{ (χωρίς απόλυτη τιμή)}$$

☛ **10.** Το **αποτέλεσμα της συμβολής** δύο κυμάτων που προέρχονται από σύγχρονες πηγές σ' ένα ορισμένο σημείο Μ του μέσου, εξαρτάται από τη διαφορά φάσης των ταλαντώσεων που αναγκάζεται να εκτελέσει το σημείο αυτό εξαιτίας των δύο κυμάτων. Η διαφορά φάσης **οφείλεται στη χρονική διαφορά** με την οποία φτάνουν τα κύματα στο συγκεκριμένο σημείο, **λόγω των διαφορετικών αποστάσεων r_1,r_2 που διανύουν από κάθε πηγή μέχρι το σημείο.**

Συγκεκριμένα, έστω ότι το σημείο Μ εκτελεί εξαιτίας κάθε κύματος τις ταλαντώσεις:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \text{ και } y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$

Έστω ότι $r_1<r_2$, οπότε η συμβολή ξεκινά τη χρονική στιγμή: $t_2 = \frac{r_2}{u}$

Η διαφορά φάσης των δύο ταλαντώσεων δίνεται από τη σχέση ($r_1<r_2 \Rightarrow \varphi_1>\varphi_2$):

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) - 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο που δίνει το πλάτος ταλάντωσης μετά τη συμβολή έχουμε:

$$|A'| = \left|2A \cdot \sigma\upsilon\nu\pi\frac{(r_2 - r_1)}{\lambda}\right| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{r_2 - r_1}{2\lambda}\right)\right| \Rightarrow |A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\left(2\pi\frac{\lambda \cdot \Delta\varphi}{2\pi \cdot 2\lambda}\right)\right| \Rightarrow$$

$$\boxed{|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{\Delta\varphi}{2}\right|}$$

- ✓ Αν τα κύματα συμβάλλοντας στο σημείο Μ βρίσκονται σε **συμφωνία φάσης** ($\Delta\varphi=2\kappa\pi$), τότε:

$$|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\kappa \cdot \pi}{2}\right| = 2A|\sigma\upsilon\nu(\kappa\pi)| = 2A \text{, δηλαδή έχουμε } \textbf{ενίσχυση}$$

- ✓ Αν τα κύματα συμβάλλοντας στο σημείο Μ βρίσκονται σε **αντίθεση φάσης** [$\Delta\varphi=(2\kappa+1)\pi$], τότε:

$$|A'| = 2A\left|\sigma\upsilon\nu\frac{(2\kappa + 1) \cdot \pi}{2}\right| = 0 \text{, δηλαδή έχουμε } \textbf{απόσβεση}$$

☛ **11. Όταν ζητείται να βρούμε τα σημεία ενισχυτικής και ακυρωτικής συμβολής στο ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τις δύο σύγχρονες πηγές $Π_1$ και $Π_2$** εργαζόμαστε ως εξής:

Σημεία ενισχυτικής συμβολής

Τα σημεία ενισχυτικής συμβολής ικανοποιούν τη σχέση:

$$\mathbf{r_1 - r_2 = N \cdot \lambda} \text{ με } N=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$$

$$r_1 - r_2 = \pm N \cdot \lambda \quad (1)$$

Για τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$ ισχύει επιπλέον:

$$r_1 + r_2 = d \qquad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (1) και (2) προκύπτει:

$$2r_1 = N \cdot \lambda + d$$

$$\boxed{\mathbf{r_1 = N \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2}}} \text{ με } N=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$$

(Οι θετικές του Ν δίνουν τα σημεία ενισχυτικής συμβολής που βρίσκονται δεξιά από την μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$, ενώ οι αρνητικές τα σημεία που βρίσκονται αριστερά από την μεσοκάθετο).

Πρέπει όμως να ισχύει:

$$0 \le r_1 \le d \Rightarrow 0 \le N \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{d}{2} \le d \Rightarrow 0 \le N \cdot \lambda + d \le 2d$$

$$\Rightarrow -d \le N \cdot \lambda \le d \Rightarrow -\frac{d}{\lambda} \le N \le \frac{d}{\lambda}$$

Σημεία ακυρωτικής συμβολής

Τα σημεία ακυρωτικής συμβολής ικανοποιούν τη σχέση:

$$r_1 - r_2 = (2N+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ με } N=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots$$

$$r_1 - r_2 = (2N+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (3)$$

Για τα σημεία του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$ ισχύει επιπλέον:

$$r_1 + r_2 = d \qquad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις εξισώσεις (3) και (4) προκύπτει:

$$2r_1 = (2N+1) \cdot \frac{\lambda}{2} + d$$

$$\boxed{\mathbf{r_1 = (2N+1) \cdot \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2}}}$$

(Η τιμή Ν=0 και οι υπόλοιπες θετικές τιμές του Ν δίνουν τα σημεία ακυρωτικής συμβολής που βρίσκονται δεξιά από την μεσοκάθετο του ευθυγράμμου τμήματος $Π_1Π_2$, ενώ οι αρνητικές τα σημεία που βρίσκονται αριστερά από την μεσοκάθετο).

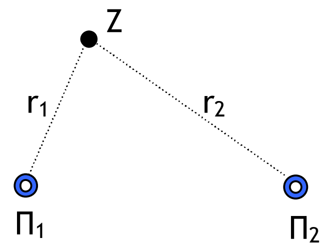
Πρέπει όμως να ισχύει:

$$0 \le r_1 \le d \Rightarrow 0 \le (2N+1) \cdot \frac{\lambda}{4} + \frac{d}{2} \le d \Rightarrow 0 \le (2N+1) \cdot \lambda + 2d \le 4d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2d \le (2N+1) \cdot \lambda \le 2d \Rightarrow -\frac{2d}{\lambda} \le 2N+1 \le \frac{2d}{\lambda} \Rightarrow -\frac{2d}{\lambda} - 1 \le 2N \le \frac{2d}{\lambda} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-2d-\lambda}{2\lambda} \le N \le \frac{2d-\lambda}{2\lambda}$$

☛ 12. Όταν μας ζητούν την απομάκρυνση ενός σημείου από τη θέση ισορροπίας του κάποια χρονική στιγμή, πρέπει να εξετάζουμε πότε φτάνει το κάθε κύμα στο συγκεκριμένο σημείο.



Το σημείο Ζ δεν ξεκινά να ταλαντώνεται τη χρονική στιγμή t=0. Μέχρι να φτάσει το πρώτο κύμα σε αυτό, το σημείο Ζ είναι ακίνητο στη Θ.Ι.(**y_Z=0**).

Από τη στιγμή που φτάνει το πρώτο κύμα(προέρχεται από την πιο κοντινή πηγή, εδώ η $Π_1$) η εξίσωση ταλάντωσής του είναι:

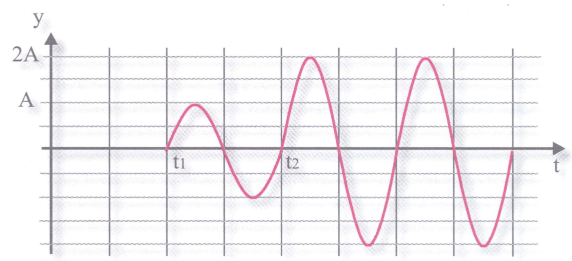
$$y_Z = Aημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{λ}\right) \quad \text{όπου } t_1 \le t < t_2$$

όπου: t_1: η χρονική στιγμή που στο σημείο φτάνει το κύμα από την πιο κοντινή πηγή, και
t_2: η χρονική στιγμή που φτάνει το κύμα και από την πιο απομακρυσμένη πηγή και ξεκινά η συμβολή (στο συγκεκριμένο σχήμα $Π_2$).

Από τη στιγμή που φτάνει και το δεύτερο κύμα η εξίσωση ταλάντωσης είναι:

$$y_Z = 2A \cdot συν\frac{π(r_1 - r_2)}{λ} \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ}\right) \quad \text{όπου } t \ge t_2$$

Στο διπλανό διάγραμμα βλέπουμε πώς μπορεί να είναι η γραφική παράσταση y=f(t) για ένα τυχαίο σημείο της επιφάνειας του υγρού που βρίσκεται πάνω στον πρώτο κροσσό ενίσχυσης μετά την μεσοκάθετη.



Ας προσέξουμε και ένα λεπτό σημείο

Μετά την έναρξη της συμβολής σε ένα σημείο, η κλίση της γραφικής παράστασης απομάκρυνσης του **ΠΑΝΤΑ ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ**.

Κάθε σημείο, μόλις φθάσει σε αυτό ένα κύμα προερχόμενο από πηγή χωρίς αρχική φάση, αποκτά θετική ταχύτητα u_{max}, γιατί με τέτοια ταχύτητα ξεκίνησε την ταλάντωσή της και η πηγή.

Επομένως, μόλις αρχίζει μία σύνθετη ταλάντωση, κατά τη συμβολή κυμάτων, η ταχύτητα του σημείου αλγεβρικά αυξάνεται, αφού λίγο πριν είχε ταχύτητα u_1 λόγω του πρώτου κύματος, και αμέσως μετά την έναρξη της συμβολής έχει ταχύτητα $u=u_1+u_{max,2}$.

Όποια τιμή και να έχει η u_1, αφού η $u_{max,2}$ θα είναι θετική, θα ισχύει $u>u_1$.

Γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα εκφράζεται από την κλίση της καμπύλης στο διάγραμμα y-t και έτσι η αλγεβρική τιμή της κλίσης πάντα αυξάνεται αμέσως μετά τη συμβολή.

13. Πηγές που δεν είναι σύγχρονες

Όσα έχουν αναφερθεί μέχρι τώρα στη συμβολή κυμάτων, ισχύουν για σύγχρονες πηγές που αρχίζουν την ίδια χρονική στιγμή να εκτελούν αρμονική ταλάντωση προς τη θετική κατεύθυνση. Άρα, οι εξισώσεις ταλάντωσης των δύο πηγών είναι $y_1=A\eta\mu(\omega t)$ και $y_2=A\eta\mu(\omega t)$. Αν οι δύο πηγές δεν αρχίζουν ταυτόχρονα την ταλάντωσή τους, τότε θα παρουσιάζουν διαφορά φάσης θ. Αν είναι $y=A\eta\mu(\omega t)$ η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής Π_1 και $y=A\eta\mu(\omega t+\theta)$ η εξίσωση ταλάντωσης της πηγής Π_2, η εξίσωση των δύο κυμάτων, θα είναι:

$$y_1 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right) \quad \text{και} \quad y_2 = A\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}\right)$$

Εφαρμόζοντας της αρχή της επαλληλίας θα έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = A\left[\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}\right)+\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}\right)\right]$$

Λόγω της τριγωνομετρικής ταυτότητας $\eta\mu A+\eta\mu B=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$y = 2A\eta\mu\frac{2\pi}{2}\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}+\frac{t}{T}-\frac{r_2}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{2}\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1}{\lambda}-\frac{t}{T}+\frac{r_2}{\lambda}-\frac{\theta}{2\pi}\right)$$

Άρα, η εξίσωση της σύνθετης ταλάντωσης ενός σημείου θα είναι:

$$\boxed{\mathbf{y = 2A\cdot \sigma\upsilon\nu\pi\left(\frac{r_1-r_2}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}\right)\cdot\eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_1+r_2}{2\lambda}+\frac{\theta}{4\pi}\right)}}$$

Τώρα οι θέσεις των κροσσών ενίσχυσης και απόσβεσης θα είναι προφανώς διαφορετικές και θα εξαρτώνται από τη γωνία θ. Πράγματι τώρα το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης ενός σημείου δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{\mathbf{|A'| = 2A\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\pi\left(\frac{r_1-r_2}{\lambda}+\frac{\theta}{2\pi}\right)\right|}}$$

Στη χαρακτηριστική περίπτωση που είναι θ=π rad, δηλαδή η μία πηγή αρχίζει T/2 πριν την άλλη, τότε στη μεσοκάθετη των δύο πηγών (όπου $r_1=r_2$) θα είναι:

$$|A'| = 2A\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = 0$$

δηλαδή η μεσοκάθετη θα είναι κροσσός απόσβεσης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ-ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΣΤΑ ΣΤΑΣΙΜΑ ΚΥΜΑΤΑ

14. Η εξίσωση του στάσιμου κύματος $y=2A\text{συν}\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right)\text{ημ}\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right)$ ισχύει:

a. Στην περίπτωση της συμβολής δύο κυμάτων που τη χρονική στιγμή t=0 φθάνουν στην αρχή των συντεταγμένων κινούμενα με αντίθετες ταχύτητες διάδοσης. Στην περίπτωση αυτή το στάσιμο κύμα υπάρχει στην περιοχή συμβολής που είναι η περιοχή στην οποία υπάρχουν και τα δύο κύματα. Κάποια χρονική στιγμή t, η περιοχή της συμβολής εκτείνεται από $-u_\delta \cdot t$ έως $+u_\delta \cdot t$, ενώ έξω από την περιοχή αυτή υπάρχει κάθε κύμα μόνο του.

b. Στην περίπτωση που έχει αρχίσει η συμβολή πριν από άγνωστο χρονικό διάστημα και θεωρούμε ότι τη χρονική στιγμή t=0 η αρχή των συντεταγμένων που είναι κοιλία διέρχεται από τη θέση ισορροπίας της με θετική ταχύτητα. Σε μια τέτοια περίπτωση υπάρχει στάσιμο κύμα σε όλα τα σημεία του άξονα διάδοσης των κυμάτων και δεν έχει νόημα να μιλάμε για περιοχή συμβολής.

15. *Στάσιμο κύμα και διαφορά φάσης*

Τα σημεία που βρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών λέμε ότι βρίσκονται στην ίδια άτρακτο. Όλα τα σημεία που βρίσκονται στην ίδια άτρακτο φτάνουν ταυτόχρονα στη μέγιστη θετική ή αρνητική ακραία θέση τους, συνεπώς οι ταλαντώσεις τους έχουν μηδενική διαφορά φάσης(**Δφ=0rad**).

Προσοχή!!!

Το γεγονός ότι τα σημεία ενός στάσιμου κύματος μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι συμφασικά **δε σημαίνει ότι έχουν κάθε στιγμή ίδια απομάκρυνση και ίδια ταχύτητα**. Συμφασικά σημαίνει ότι διέρχονται ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας με ταχύτητα ίδιας φοράς (**όχι υποχρεωτικά και ίδιου μέτρου**) ενώ ταυτόχρονα βρίσκονται και στις ακραίες θέσεις της ταλάντωσης τους (**δεν έχουν όμως υποχρεωτικά και το ίδιο μέτρο πλάτους**).

Τα σημεία που βρίσκονται σε δύο διαδοχικές ατράκτους (δηλαδή μεταξύ τους μεσολαβεί ένας δεσμός) φτάνουν ταυτόχρονα σε ακραία θέση, αλλά όταν το ένα φτάνει στην ακραία αρνητική του θέση, το άλλο φτάνει στην ακραία θετική του θέση. Οι ταλαντώσεις δύο τέτοιων σημείων έχουν διαφορά φάσης **Δφ=πrad** στο στάσιμο κύμα.
Έτσι, όταν ζητείται η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων μπορούμε να βρούμε το πλήθος των δεσμών μεταξύ των δύο αυτών σημείων και θα ισχύει:

- ✓ ***Αν μεταξύ των υπό μελέτη σημείων δεν υπάρχει κάποιος δεσμός ή υπάρχει άρτιος αριθμός δεσμών, τότε οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων δεν εμφανίζουν διαφορά φάσης (Δφ=0 rad).***

- ✓ ***Αν μεταξύ των υπό μελέτη σημείων υπάρχει περιττός αριθμός δεσμών, τότε οι ταλαντώσεις των υλικών σημείων εμφανίζουν διαφορά φάσης π rad (Δφ=π rad).***

Ένας 2^{ος} τρόπος εύρεσης της διαφοράς φάσης δύο σημείων στα στάσιμα κύματα είναι και ο παρακάτω:
Ελέγχουμε το γινόμενο $y_1 \cdot y_2$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- ✓ Αν **$y_1 \cdot y_2 > 0$** δηλαδή τα σημεία έχουν ομόσημες απομακρύνσεις(δηλαδή μεταξύ τους δεν μεσολαβεί κάποιος δεσμός ή μεσολαβεί άρτιος αριθμός δεσμών), τότε **Δφ=0 rad.**

- ✓ Αν **$y_1 \cdot y_2 < 0$** δηλαδή τα σημεία έχουν ετερόσημες απομακρύνσεις(δηλαδή βρίσκονται εκατέρωθεν ενός δεσμού ή μεσολαβεί μεταξύ τους περιττός αριθμός δεσμών), τότε **Δφ=π rad.**

Εφαρμογή
Κατά μήκος μιας χορδής δημιουργείται στάσιμο κύμα που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$y=4συν(πx/5)\cdot ημ20πt \quad (x,y \text{ σε cm και } t \text{ σε s})$$

Να βρείτε τη διαφορά φάσης των σημείων Α και Β που απέχουν από το άκρο της χορδής(x=0) αποστάσεις x_A=3cm και x_B=24cm.

Λύση

$$y_A \cdot y_B = 4σσυ\left(\frac{3π}{5}\right)ημ20πt \cdot 4σσυ\frac{24π}{t}ημ20πt =$$

$$= 16 \cdot ημ^2\,(20 \cdot πt)\ \cdot συν\left(\frac{3π}{5}\right)συν\left(4π + \frac{4π}{5}\right)$$

$$= 16 \cdot ημ^2\,(20 \cdot πt\,) \cdot συν\left(\frac{3π}{5}\right)συν\left(\frac{4π}{5}\right) > 0$$

Αφού $συν\left(\frac{3π}{5}\right) < 0$ και $συν\left(\frac{4π}{5}\right) < 0$ και έτσι τα σημεία έχουν συνεχώς ομόσημες απομακρύνσεις δηλαδή **Δφ=0 rad.**

16. Πώς σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος

1^ο Βήμα: Βρίσκουμε πρώτα τις θέσεις των κοιλιών και των δεσμών μεταξύ των σημείων που θέλουμε να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο.

2^ο Βήμα: Υπολογίζουμε την απομάκρυνση y από τη θέση ισορροπίας ενός υλικού σημείου για το οποίο διαθέτουμε τις αντίστοιχες πληροφορίες τη χρονική στιγμή που θέλουμε να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο (συνήθως βολεύει να υπολογίζουμε την απομάκρυνση y μιας κοιλίας π.χ. της πρώτης(x=0) με την προϋπόθεση ότι στο x=0 σχηματίζεται κοιλία).

3^ο Βήμα: Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο, φροντίζοντας η γραφική παράσταση να μην ξεπερνάει το y που υπολογίσαμε στο 2^ο βήμα.

Κατά το σχεδιασμό του στιγμιοτύπου προσέχουμε ότι:

- Τα υλικά σημεία που βρίσκονται σε δεσμούς δεν ταλαντώνονται, ενώ τα υλικά σημεία που βρίσκονται σε κοιλίες ταλαντώνονται με μέγιστο πλάτος.
- Όλα τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται φτάνουν ταυτόχρονα σε μέγιστη απομάκρυνση, με τις διαδοχικές κοιλίες να φτάνουν σε αντίθετες μέγιστες απομακρύνσεις.
- Όλα τα υλικά σημεία που ταλαντώνονται περνούν ταυτόχρονα από τη θέση ισορροπίας τους, με τις διαδοχικές κοιλίες να περνούν με αντίθετες, μέγιστες κατά μέτρο ταχύτητες.

Εφαρμογή

Σε γραμμικό ελαστικό μέσο που ταυτίζεται με τον άξονα x'Ox δημιουργείται στάσιμο κύμα μέγιστου πλάτους 0,2 m και συχνότητας 5 Hz. Τη χρονική στιγμή t=0 το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή Ο του άξονα διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα και στο σημείο αυτό σχηματίζεται κοιλία.

Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μεταξύ των σημείων Ο και Κ(x_K=+0,9m):

α. τη χρονική στιγμή t_1=0,3s

β. τη χρονική στιγμή t_2=0,35s

γ. τη χρονική στιγμή t_3=0,4s

δ. τη χρονική στιγμή $t_4=\frac{5}{12}$s

Λύση:

Βρίσκουμε πρώτα τις θέσεις των κοιλιών και των δεσμών που δημιουργούνται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΛ.

Για τις κοιλίες έχουμε:

$$x_K = N\cdot\frac{\lambda}{2} \Rightarrow x_K = 0{,}2N \quad \text{με} \quad N=0,1,2,\ldots$$

Δηλαδή κοιλίες σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΛ στις θέσεις του άξονα:
0, +0,2m, +0,4m, +0,6m και +0,8m

Για τους δεσμούς έχουμε:

$$x_\delta = (2N+1)\cdot\frac{\lambda}{4} \Rightarrow x_K = (2N+1)\cdot 0{,}1 \quad \text{με} \quad N=0,1,2,\ldots$$

Δηλαδή δεσμοί σχηματίζονται στο ευθύγραμμο τμήμα ΟΛ στις θέσεις του άξονα:
+0,1m, +0,3m, +0,5m, +0,7m και +0,9m(στο σημείο Λ είναι δεσμός)

α. Αφού το υλικό σημείο που βρίσκεται στην αρχή Ο(x=0) του άξονα τη χρονική στιγμή t=0 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με θετική ταχύτητα, έχει εξίσωση ταλάντωσης της μορφής:

y_O=Α'ημωt ή y_O=0,2ημ(2πft) ή y_O=0,2ημ(10πt)

ενώ η χρονική εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσής του θα είναι:

u_O=ωΑ'συν(ωt) ή u_O=ωΑ'συν(2πft) ή u_O=2πσυν(10πt)

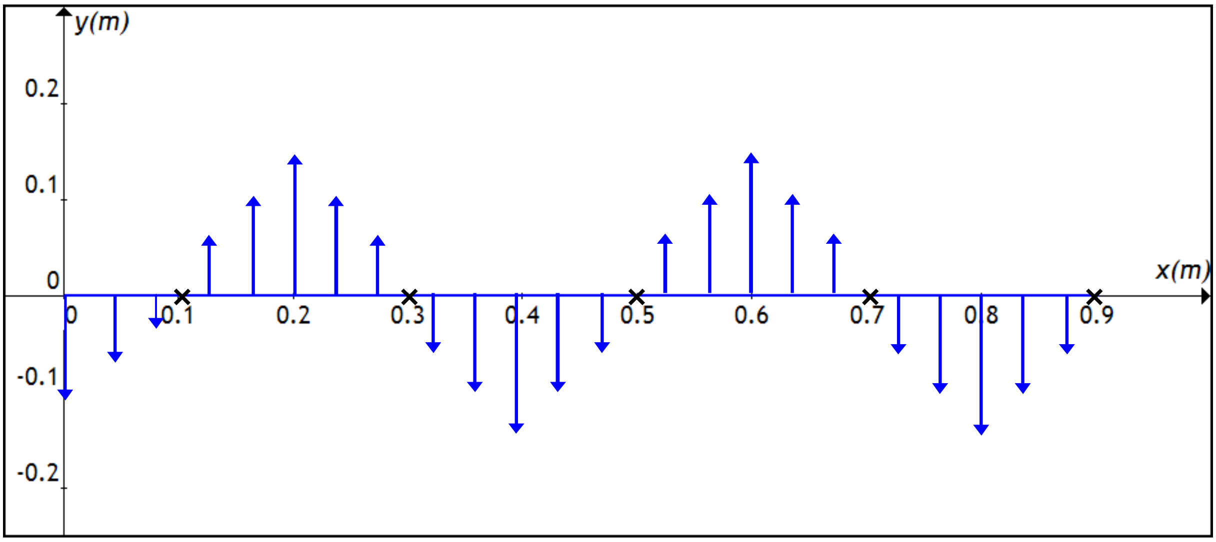
Τη χρονική στιγμή t_1=0,3s είναι:

$$y_{O(t1)}=0,2ημ3π=0$$

και η ταχύτητα ταλάντωσής του είναι:

$$u_{O(t1)}=2πσυν3π=-2π\ m/s$$

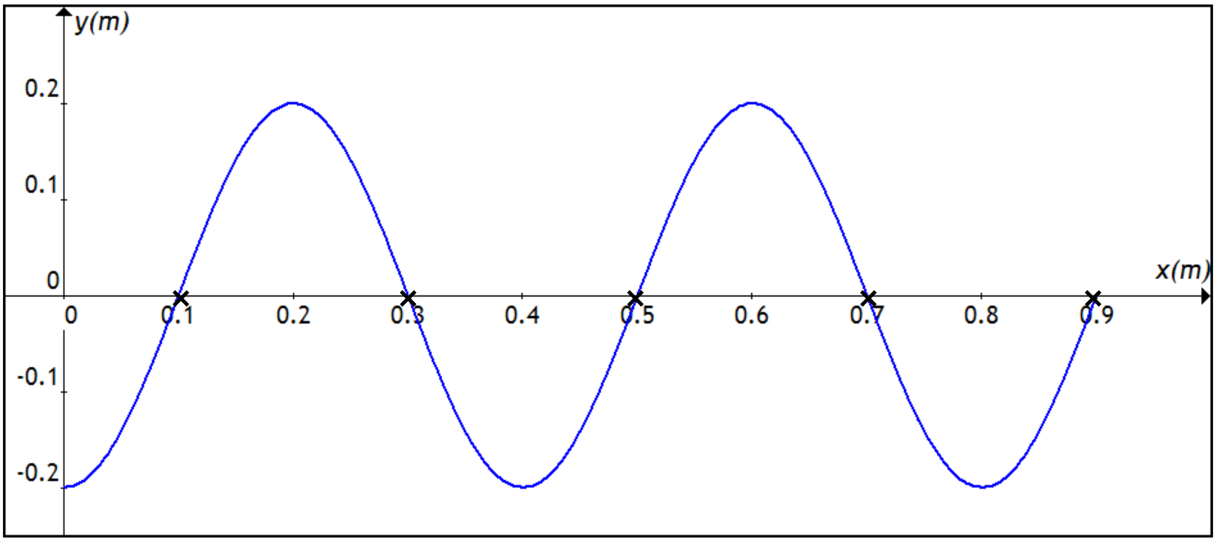
Άρα, τη χρονική στιγμή t_1=0,3s το υλικό σημείο O(x=0) διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του με αρνητική ταχύτητα. Αυτό σημαίνει ότι όλα τα υλικά σημεία του μέσου που ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή t_1=0,3s διέρχονται από τη θέση ισορροπίας τους (με τις διαδοχικές κοιλίες να κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις). Το ζητούμενο στιγμιότυπο φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



β. Τη χρονική στιγμή t_2=0,35s είναι:

$$y_{O(t2)}=0,2ημ3,5π=0,2ημ\left(2π+\frac{3π}{2}\right)=-0,2\ m$$

δηλαδή το σημείο O στο οποίο σχηματίζεται κοιλία βρίσκεται στην κάτω ακραία θέση της ταλάντωσής του. Αφού μια κοιλία βρίσκεται σε ακραία θέση της ταλάντωσής της, όλα τα σημεία του ελαστικού μέσου που ταλαντώνονται βρίσκονται σε ακραία θέση της ταλάντωσής τους. Σχεδιάζουμε το στιγμιότυπο, φροντίζοντας οι διαδοχικές κοιλίες να βρίσκονται σε αντίθετες απομακρύνσεις.



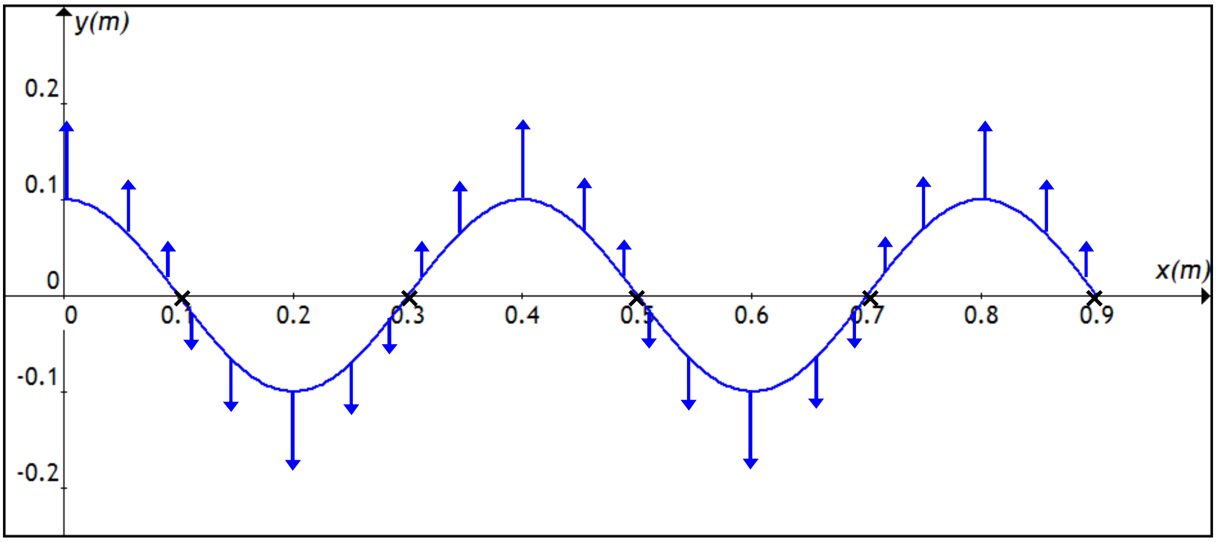
γ. Τη χρονική στιγμή $t_3=\frac{5}{12}$s είναι:

$$y_{O(t3)}=0{,}2ημ\left(\frac{50\pi}{12}\right)=0{,}2ημ\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=+0{,}1\,m$$

και η ταχύτητα ταλάντωσής του είναι:

$$u_{O(t3)}=2πσυν\left(\frac{50\pi}{12}\right)=2\pi\cdot συν\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)=+\sqrt{3}\cdot\pi\ m/s$$

Το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι το παρακάτω. Όταν ζητείται το στιγμιότυπο μια χρονική στιγμή που τα υλικά σημεία του ελαστικού μέσου βρίσκονται σε κίνηση, πρέπει να σχεδιάσουμε και τη «φορά» της ταχύτητας των υλικών σημείων.



Πέτρος Καραπέτρος
Λυκειακές Τάξεις Μεσοβουνίων
pkarapetros@hotmail.com