ΦΥΣΙΚΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

1

Μηχανικές Ταλαντώσεις

Επιμέλεια
Παρασύρης Κώστας
-Φυσικός-

1. Περιοδικά φαινόμενα - Γραμμική αρμονική ταλάντωση

Περιοδικά ονομάζονται τα **φαινόμενα** που επαναλαμβάνονται με τον ίδιο τρόπο σε ίσα χρονικά διαστήματα. Π.χ. ομαλή κυκλική κίνηση, χτύποι καρδιάς, αναπνοή, κίνηση εκκρεμούς, περιστροφή γης γύρω από τον ήλιο κ.ά.

- **Περίοδος** (**Τ**) ενός περιοδικού φαινομένου ονομάζεται ο χρόνος που απαιτείται για μια πλήρη επανάληψη του φαινομένου ή ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών επαναλήψεων του φαινομένου.

Η περίοδος είναι **μονόμετρο μέγεθος** και η μονάδα μέτρησής της είναι το **1 sec**.

- **Συχνότητα** (**f**) ενός περιοδικού φαινομένου ονομάζεται το φυσικό μέγεθος του οποίου το μέτρο θα δίνεται από το σταθερό πηλίκο του αριθμού Ν των επαναλήψεων του φαινομένου σε κάποιο χρόνο t, προς το χρόνο αυτό. Δηλαδή:

$$\boxed{f = \frac{N}{t}}$$

Η συχνότητα είναι **μονόμετρο μέγεθος** και έχει μονάδα μέτρησης το 1 sec^{-1} ή 1 κύκλος/sec ή **1 Hz** (Hertz).

Σχέση μεταξύ περιόδου – συχνότητας

Επειδή σε χρόνο t ίσο με μια περίοδο Τ έχουμε μια επανάληψη του φαινομένου έχουμε $f = \frac{N}{t} \underset{N=1}{\overset{t=T}{\Rightarrow}}$

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

- Η **κυκλική** (ή **γωνιακή**) **συχνότητα** (ω) είναι το μέγεθος που αναφέρεται σε όλα τα περιοδικά φαινόμενα και εκφράζει τον αριθμό των επαναλήψεων ενός φαινομένου σε χρόνο 2π sec. Η κυκλική συχνότητα είναι **μονόμετρο μέγεθος** και είναι ίση με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας στην ομαλή κυκλική κίνηση. Έτσι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad \text{και} \quad \boxed{\omega = 2\pi f}$$

Μονάδα μέτρησης της κυκλικής συχνότητας είναι το **1** $\mathbf{rad/sec}$.

Κάθε περιοδική κίνηση ενός σώματος κατά την οποία το σώμα κινείται παλινδρομικά μεταξύ δύο ακραίων θέσεων λέγεται **ταλάντωση** (π.χ. εκκρεμές, σώμα κρεμασμένο από ελατήριο).
Μεταξύ των δύο αυτών ακραίων θέσεων υπάρχει μια θέση στην οποία αν σταματήσουμε το σώμα, αυτό θα ακινητοποιηθεί μόνιμα. Η θέση αυτή λέγεται **θέση ισορροπίας** (**Θ.Ι.**) του ταλαντωτή και στη θέση αυτή η συνισταμένη των δυνάμεων θα είναι ίση με μηδέν.
Γραμμική χαρακτηρίζεται η ταλάντωση όπου η κίνηση του ταλαντωτή είναι ευθύγραμμη (π.χ. σώμα δεμένο στην ελεύθερη άκρη ελατηρίου).

Απομάκρυνση (**x**) ονομάζουμε την αλγεβρική τιμή της μετατόπισης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του.
Πλάτος (**A**) ονομάζουμε τη μέγιστη τιμή της απομάκρυνσης του σώματος.

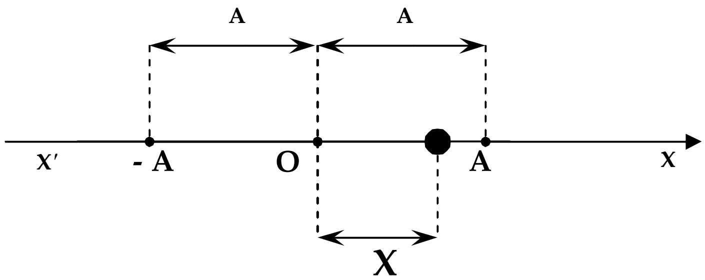
Γραμμική ή απλή αρμονική ταλάντωση (**Γ.Α.Τ.**) λέγεται η ταλάντωση ενός σώματος που η απομάκρυνσή του είναι ημιτονοειδής (αρμονική) συνάρτηση του χρόνου.

2. *Απλή αρμονική ταλάντωση*

α) Κινηματική προσέγγιση

- *Εξίσωση απομάκρυνσης – χρόνου (x-t)*

Έστω ένα σώμα που κινείται παλινδρομικά πάνω σ' ένα άξονα γύρω από την αρχή Ο του άξονα. Αν το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η απομάκρυνσή του (x) σε σχέση με το χρόνο θα δίνεται από τη σχέση



$$\boxed{x = A \cdot \eta\mu\omega t}$$

Η γωνία **φ = ωt** που η τιμή της καθορίζει την τιμή της απομάκρυνσης του σώματος τη χρονική στιγμή t ονομάζεται ***φάση της ταλάντωσης***.

- *Εξίσωση ταχύτητας – χρόνου (υ-t)*

Η ταχύτητα του σώματος κάθε χρονική στιγμή θα δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t}$$

$\boxed{\upsilon_{max} = \omega A}$
όπου υ_{max} η μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

- *Εξίσωση επιτάχυνσης – χρόνου (α-t)*

Η επιτάχυνση του σώματος κάθε χρονική στιγμή θα δίνεται από τη σχέση

$$\boxed{\alpha = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu\omega t}$$

$\boxed{\alpha_{max} = \omega^2 A}$ ή $\boxed{\alpha_{max} = \omega\upsilon_{max}}$
όπου α_{max} η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος.

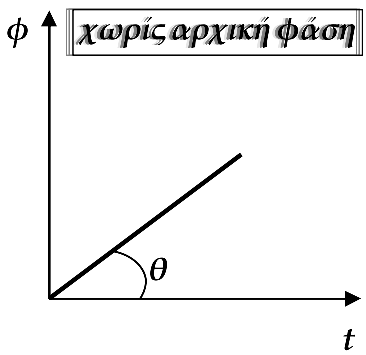
Παρατήρηση : Όλες οι παραπάνω σχέσεις ισχύουν με την προϋπόθεση ότι το σώμα τη χρονική στιγμή t=0 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και η ταχύτητά του είναι $\upsilon > 0$, δηλαδή κινείται προς τα θετικά του άξονα. Σε κάθε άλλη περίπτωση οι σχέσεις γίνονται:

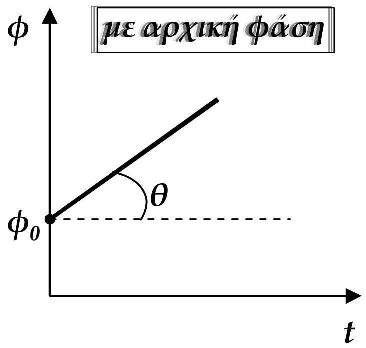
$$\mathbf{x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)}$$
$$\mathbf{\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)}$$
$$\mathbf{\alpha = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)}$$

όπου ϕ_0 είναι η φάση της ταλάντωσης τη χρονική στιγμή t = 0 και ονομάζεται ***αρχική φάση*** της ταλάντωσης. Για την αρχική φάση ισχύει:

$$\mathbf{0 \le \phi_0 < 2\pi}$$

Έτσι στην περίπτωση που δεν έχουμε αρχική φάση, η φάση της ταλάντωσης είναι **φ = ωt**, ενώ όταν έχουμε αρχική φάση είναι $\phi = \omega t + \phi_0$.



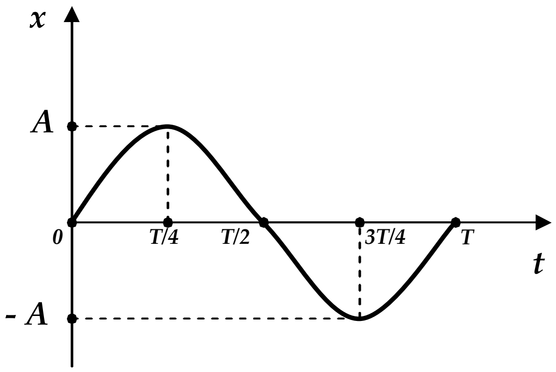


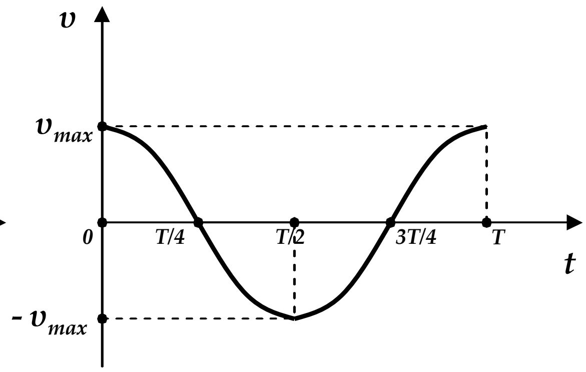
Από την κλίση της ευθείας μέσω της εφαπτομένης της γωνίας θ μπορούμε να υπολογίσουμε την κυκλική συχνότητα

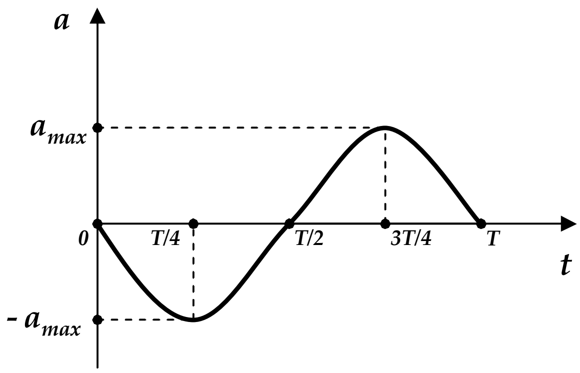
κλίση ευθείας = εφθ = ω

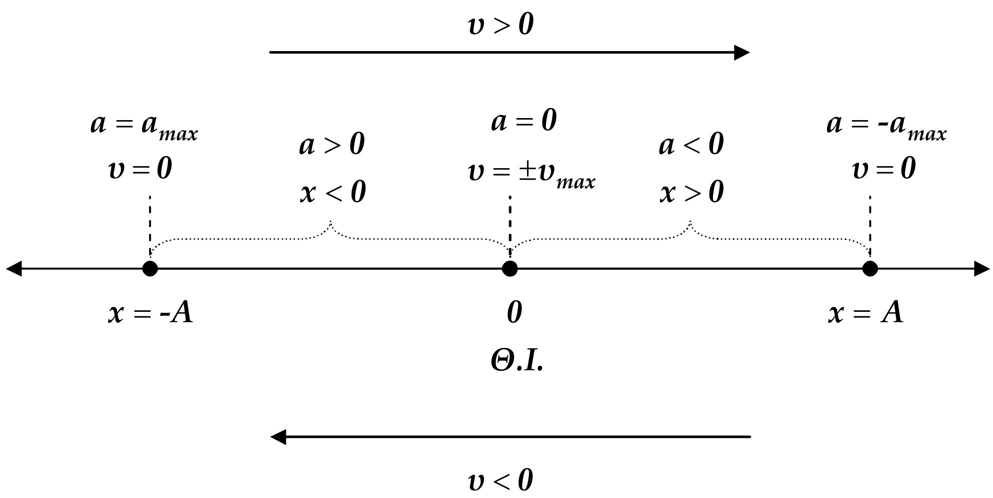
Διαγράμματα

Στην περίπτωση που ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση (χωρίς αρχική φάση) τα διαγράμματα της απομάκρυνσης, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης σε σχέση με το χρόνο είναι:









- *Σχέση ταχύτητας – απομάκρυνσης (υ-x)*

Έστω ένα σώμα που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση χωρίς αρχική φάση. Οι εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο είναι:

$$\left.\begin{array}{l} x = A \cdot \eta\mu\omega t \\ \\ \upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2 = A^2 \cdot \eta\mu^2\omega t \\ \\ \upsilon^2 = \upsilon_{max}^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \eta\mu^2\omega t = \dfrac{x^2}{A^2} \\ \\ \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \dfrac{\upsilon^2}{\upsilon_{max}^2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Προσθέτουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις κατά μέλη και έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega t + \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\upsilon_{max}^2} \Rightarrow \frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\upsilon_{max}^2} = 1$$

αφού για κάθε γωνία ισχύει ότι $\eta\mu^2 a + \sigma\upsilon\nu^2 a = 1$.

Όμως $\upsilon_{max} = \omega A$ οπότε η τελευταία σχέση γίνεται

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow \frac{\omega^2 x^2 + \upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow \omega^2 x^2 + \upsilon^2 = \omega^2 A^2 \Rightarrow \upsilon^2 = \omega^2 A^2 - \omega^2 x^2 \Rightarrow$$

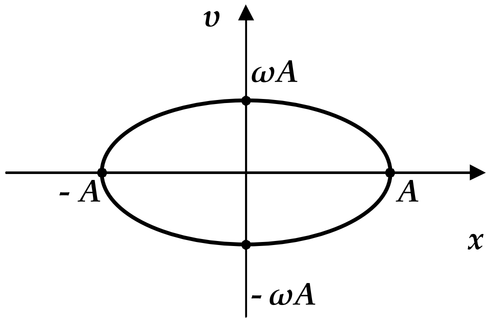
$$\boxed{\boldsymbol{\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Η τελευταία σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ταχύτητα του σώματος σε κάποια θέση της ταλάντωσης κάποια χρονική στιγμή, χωρίς να γνωρίζουμε τη χρονική αυτή στιγμή, είτε το σώμα που κάνει την ταλάντωση έχει είτε δεν έχει αρχική φάση φ_0.

2) Το διπλό πρόσημο στο τύπο δηλώνει ότι το σώμα για κάποια συγκεκριμένη θέση της ταλάντωσης μπορεί είτε να κινείται προς τη θέση ισορροπίας, είτε να απομακρύνεται από αυτή.

3) Η σχέση $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1$ είναι εξίσωση έλλειψης και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.



- <u>*Σχέση επιτάχυνσης – απομάκρυνσης (α – x)*</u>

$\alpha = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow \alpha = -\omega^2 A \cdot \eta\mu\omega t$

Όμως επειδή $x = A \cdot \eta\mu\omega t$ η τελευταία σχέση γίνεται

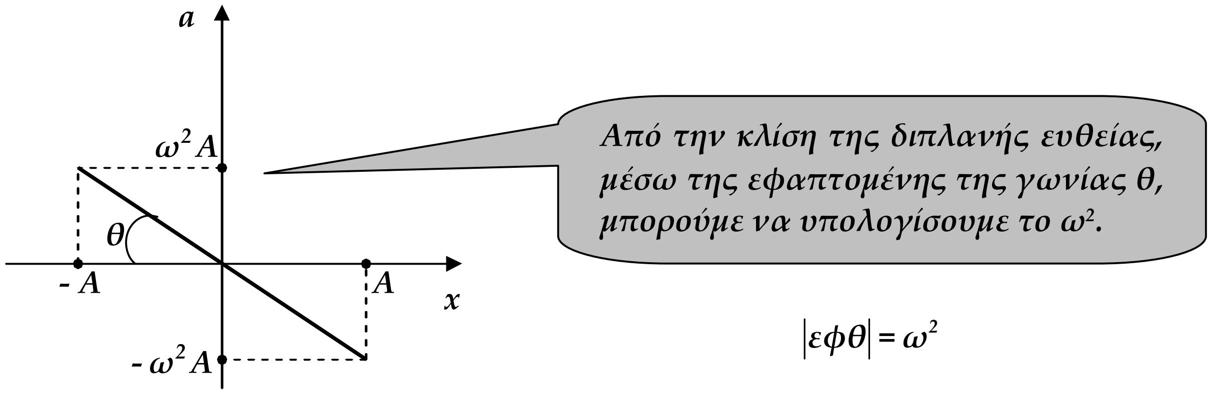
$$\boxed{\alpha = -\omega^2 x}$$

<u>Παρατηρήσεις</u>

1) Η σχέση $\alpha = -\omega^2 x$ μας δείχνει ότι στην απλή αρμονική ταλάντωση η επιτάχυνση έχει πάντοτε αντίθετο πρόσημο από την απομάκρυνση.

2) Η επιτάχυνση έχει φορά πάντα προς τη θέση ισορροπίας.

3) Η σχέση $\alpha = -\omega^2 x$ είναι εξίσωση ευθείας και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.



$$|\varepsilon\varphi\theta| = \omega^2$$

- <u>*Σχέση επιτάχυνσης – ταχύτητας (α – υ)*</u>

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= -\alpha_{max} \cdot \eta\mu\omega t \\ \upsilon &= \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} a^2 &= a_{max}^2 \cdot \eta\mu^2\omega t \\ \upsilon^2 &= \upsilon_{max}^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \eta\mu^2\omega t &= \frac{a^2}{a_{max}^2} \\ \sigma\upsilon\nu^2\omega t &= \frac{\upsilon^2}{\upsilon_{max}^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Προσθέτουμε τις δύο τελευταίες εξισώσεις κατά μέλη και έχουμε:

$$\eta\mu^2\omega t + \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \frac{a^2}{a_{max}^2} + \frac{\upsilon^2}{\upsilon_{max}^2} \Rightarrow \frac{a^2}{a_{max}^2} + \frac{\upsilon^2}{\upsilon_{max}^2} = 1$$

αφού για κάθε γωνία ισχύει ότι $\eta\mu^2 a + \sigma\upsilon\nu^2 a = 1$.

Όμως $a_{max} = \omega^2 A$ και $\upsilon_{max} = \omega A$ οπότε η τελευταία σχέση γίνεται

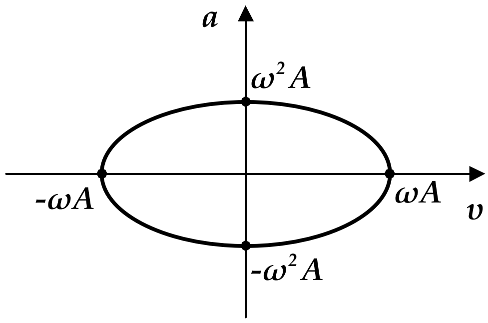
$$\frac{a^2}{\omega^4 A^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1 \Rightarrow \frac{\alpha^2 + \omega^2\upsilon^2}{\omega^4 A^2} = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \omega^2\upsilon^2 = \omega^4 A^2 \Rightarrow \alpha^2 = \omega^4 A^2 - \omega^2\upsilon^2 \Rightarrow$$

$\boxed{\alpha = \pm\omega\sqrt{\omega^2 \mathrm{A}^2 - \upsilon^2}}$ ή $\boxed{\alpha = \pm\omega\sqrt{\upsilon_{max}^2 - \upsilon^2}}$

Παρατηρήσεις

1) Η τελευταία σχέση μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την επιτάχυνση του σώματος σε κάποια θέση της ταλάντωσης που γνωρίζουμε το μέτρο της ταχύτητάς του κάποια χρονική στιγμή, χωρίς να γνωρίζουμε τη χρονική αυτή στιγμή, είτε το σώμα που κάνει την ταλάντωση έχει είτε δεν έχει αρχική φάση ϕ_0.

2) Η σχέση $\frac{a^2}{\omega^4 \mathrm{A}^2} + \frac{\upsilon^2}{\omega^2 A^2} = 1$ είναι εξίσωση έλλειψης και η γραφική της παράσταση φαίνεται παρακάτω.



β) Δυναμική προσέγγιση

Όταν ένα σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση , τότε σε τυχαία θέση της τροχιάς του έχει επιτάχυνση *α*. Η συνολική δύναμη που δέχεται το σώμα και είναι υπεύθυνη για την επιτάχυνσή του, υπακούει στο θεμελιώδη νόμο της μηχανικής:

$$\left.\begin{array}{r} F = ma \\ \alpha = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu\omega t \Rightarrow \alpha = -\omega^2 A \cdot \eta\mu\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow F = -m\omega^2 A \cdot \eta\mu\omega t$$

Όμως επειδή $x = A \cdot \eta\mu\omega t$ η τελευταία σχέση γίνεται

$$\boxed{F = -m\omega^2 x}$$

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση η συνολική δύναμη που δέχεται είναι ανάλογη με την απομάκρυνση του σώματος από το μέσο Ο της τροχιάς του και έχει αντίθετη φορά από αυτήν. Όταν το σώμα περνά από το σημείο Ο η συνολική δύναμη που δέχεται ισούται με μηδέν. Για το λόγο αυτό, το σημείο Ο ονομάζεται **θέση ισορροπίας** της ταλάντωσης.

Αν συμβολίσουμε το γινόμενο $m\omega^2$ με D (που είναι σταθερό για κάθε ταλαντωτή), δηλαδή

$$\boxed{D = m\omega^2}$$

η σχέση που δίνει τη δύναμη δίνει

$$\boxed{F = -Dx}$$

Η παραπάνω σχέση είναι γνωστή και σαν συνθήκη για την παραγωγή απλής αρμονικής ταλάντωσης. Η δύναμη F ονομάζεται **δύναμη επαναφοράς** (γιατί τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας) και η σταθερά αναλογίας D **σταθερά επαναφοράς** η τιμή της οποίας σχετίζεται με τα φυσικά χαρακτηριστικά του ταλαντούμενου συστήματος**.**

- *Εξίσωση δύναμης – χρόνου (F-t)*

Από τη σχέση $F = -m\omega^2 A \cdot \eta\mu\omega t$ προκύπτει ότι αυτή είναι της μορφής

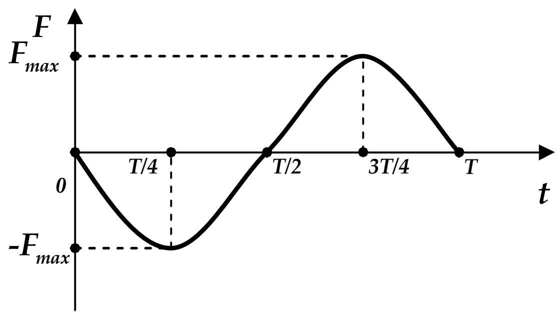
$$\boxed{F = -F_{max} \cdot \eta\mu\omega t}$$

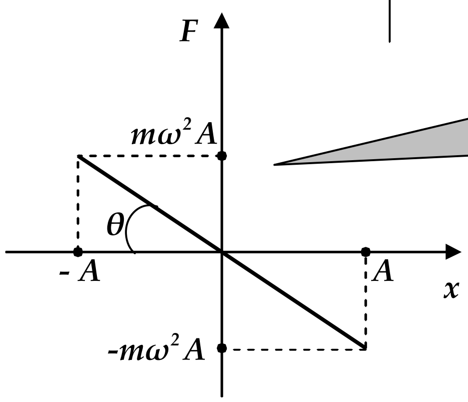
όπου $\boxed{F_{max} = m\omega^2 A}$ ή $\boxed{F_{max} = m\omega\upsilon_{max}}$ ή $\boxed{F_{max} = DA}$

Το διάνυσμα της δύναμης στην απλή αρμονική ταλάντωση είναι ομόρροπο με αυτό της επιτάχυνσης.

Διαγράμματα

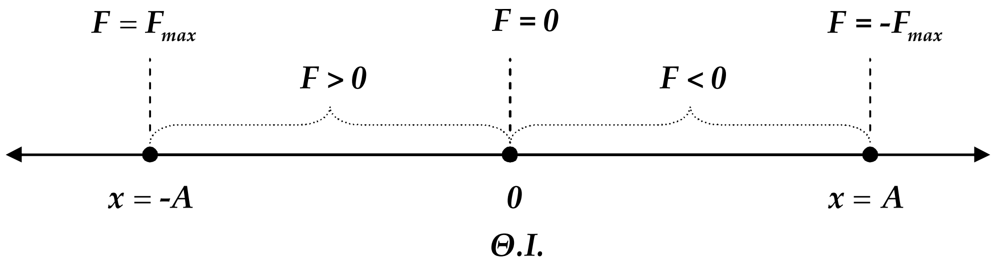
Στην περίπτωση που ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση (χωρίς αρχική φάση) τα διαγράμματα της δύναμης σε σχέση με το χρόνο και σε σχέση με την απομάκρυνση είναι:





Από την κλίση της διπλανής ευθείας, μέσω της εφαπτομένης της γωνίας θ, μπορούμε να υπολογίσουμε τη σταθερά επαναφοράς D.

$$|\varepsilon\varphi\theta| = D$$



- <u>*Σχέση περιόδου – σταθεράς επαναφοράς*</u>

$$D = m\omega^2 \Rightarrow D = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η παραπάνω σχέση μας δείχνει ότι η περίοδος Τ της ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη του πλάτους Α της ταλάντωσης και η τιμή της καθορίζεται από τη μάζα m του σώματος και από τη σταθερά επαναφοράς D.

γ) Ενεργειακή προσέγγιση

Η ενέργεια (ή ολική ενέργεια ή μηχανική ενέργεια) της ταλάντωσης ***Ε*** ενός συστήματος που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση ισούται με την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα για να το θέσουμε σε ταλάντωση. Η ενέργεια αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}D \cdot A^2}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι το πλάτος της ταλάντωσης ***Α*** καθορίζεται μόνο από την ενέργεια που προσφέραμε αρχικά στο σύστημα ώστε να αρχίσει να ταλαντώνεται.

Η ενέργεια μιας απλής αρμονικής ταλάντωσης είναι σταθερή και ανάλογη με το τετράγωνο του πλάτους της ταλάντωσης.

Στη διάρκεια της ταλάντωσης η ενέργεια ταλάντωσης εμφανίζεται ως κινητική ενέργεια Κ και ως δυναμική ενέργεια U ταλάντωσης. Ισχύουν:

$$\boxed{K = \frac{1}{2}m \cdot \upsilon^2} \quad \text{και} \quad \boxed{U = \frac{1}{2}D \cdot x^2}$$

$$K+U=\frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}D\cdot x^2\overset{\upsilon=\upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t}{\underset{x=A\cdot\eta\mu\omega t}{=}}\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_{max}^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega t+\frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\eta\mu^2\omega t\overset{\upsilon_{max}=\omega\cdot A}{=}$$

$$=\frac{1}{2}m\cdot\omega^2\cdot A^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega t+\frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\eta\mu^2\omega t\overset{D=m\cdot\omega^2}{=}\frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega t+\frac{1}{2}D\cdot A^2\cdot\eta\mu^2\omega t=$$

$$=\frac{1}{2}D\cdot A^2\left(\sigma\upsilon\nu^2\omega t+\eta\mu^2\omega t\right)\overset{\sigma\upsilon\nu^2\omega t+\eta\mu^2\omega t=1}{=}\frac{1}{2}D\cdot A^2=E$$

Άρα

$$\boxed{E=K+U}\quad \text{ή}\quad \boxed{E=\frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2+\frac{1}{2}D\cdot x^2}\ \text{(=σταθερή)}$$

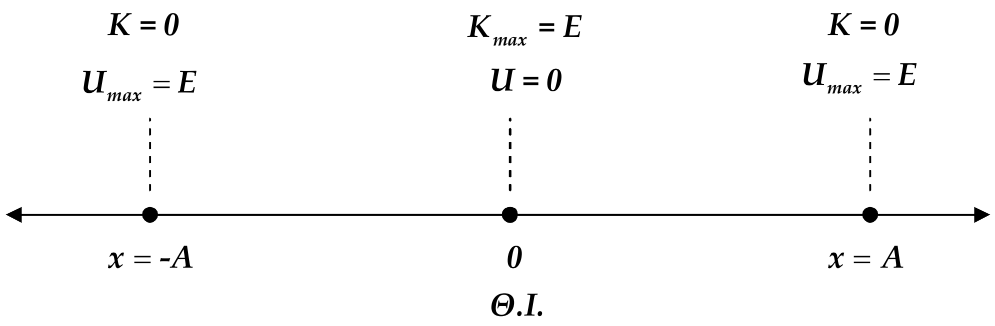
Αρχή
Διατήρησης
Ενέργειας
Ταλάντωσης
(Α.Δ.Ε.Τ.)

Επίσης για την ολική ενέργεια της ταλάντωσης ισχύουν:

$$K_{max}=\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_{max}^2\overset{\upsilon_{max}=\omega\cdot A}{=}\frac{1}{2}m\cdot\omega^2\cdot A^2\overset{D=m\cdot\omega^2}{=}\frac{1}{2}D\cdot A^2=E$$

Άρα

$$\boxed{E=K_{max}=\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_{max}^2}\ \text{και}\ \boxed{E=U_{max}=\frac{1}{2}D\cdot A^2}$$



- *Εξίσωση κινητικής ενέργειας – χρόνου (K-t)*

$$\left.\begin{array}{l} K=\frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2 \\ \\ \upsilon=\upsilon_{max}\cdot\sigma\upsilon\nu\omega t \end{array}\right\}\Rightarrow K=\frac{1}{2}m\cdot\upsilon_{max}^2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega t\Rightarrow\boxed{K=E\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega t}$$

- *Εξίσωση δυναμικής ενέργειας – χρόνου (U-t)*

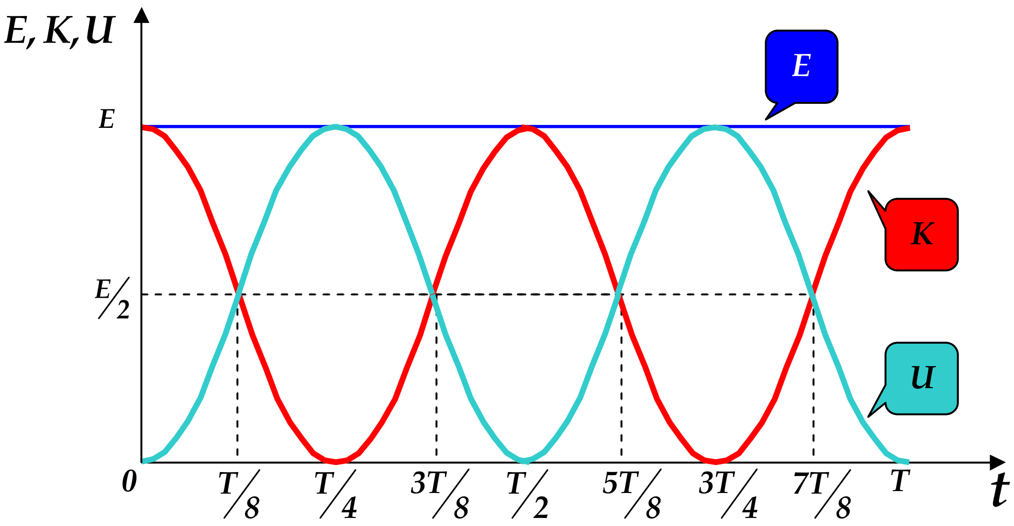
$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} D \cdot x^2 \\ x &= A \cdot \eta\mu\omega t \end{aligned}\right\} \Rightarrow U = \frac{1}{2} D \cdot A^2 \cdot \eta\mu^2\omega t \Rightarrow \boxed{U = E \cdot \eta\mu^2\omega t}$$

Παρατήρηση: Αν η ταλάντωση έχει αρχική φάση οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται:

$$K = E \cdot \sigma\upsilon\nu^2(\omega t + \phi_0) \quad \text{και} \quad U = E \cdot \eta\mu^2(\omega t + \phi_0)$$

Διαγράμματα

Στην περίπτωση που ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση (χωρίς αρχική φάση) τα διαγράμματα της ολικής, της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο είναι:



Παρατηρούμε ότι η κινητική και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι περιοδικές συναρτήσεις του χρόνου με περίοδο T' ίση με τη μισή της περιόδου της ταλάντωσης T, δηλαδή $T' = T/2$.

Η κινητική και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίσες μεταξύ τους τις χρονικές στιγμές όπου:

$$K = U \Rightarrow \cancel{E} \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega t = \cancel{E} \cdot \eta\mu^2\omega t \Rightarrow \varepsilon\phi^2\omega t = 1 \Rightarrow \varepsilon\phi\omega t = \pm 1 \Rightarrow \omega t = (2k+1)\cdot \pi/4 \overset{\omega=\frac{2\pi}{T}}{\Rightarrow}$$

$$\frac{2\cancel{\pi}}{T} \cdot t = (2k+1) \cdot \cancel{\pi}/4 \Rightarrow$$

$$\boxed{t = (2k+1) \cdot T/8} \text{ όπου } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Από το παραπάνω διάγραμμα επίσης παρατηρούμε ότι στη διάρκεια κάθε περιόδου της ταλάντωσης, η δυναμική και η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίσες μεταξύ τους 4 φορές(τα 4 σημεία τομής των U, K στο διάγραμμα).

- *Εξίσωση δυναμικής ενέργειας – απομάκρυνσης (U-x) & εξίσωση κινητικής ενέργειας – απομάκρυνσης (K-x)*

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

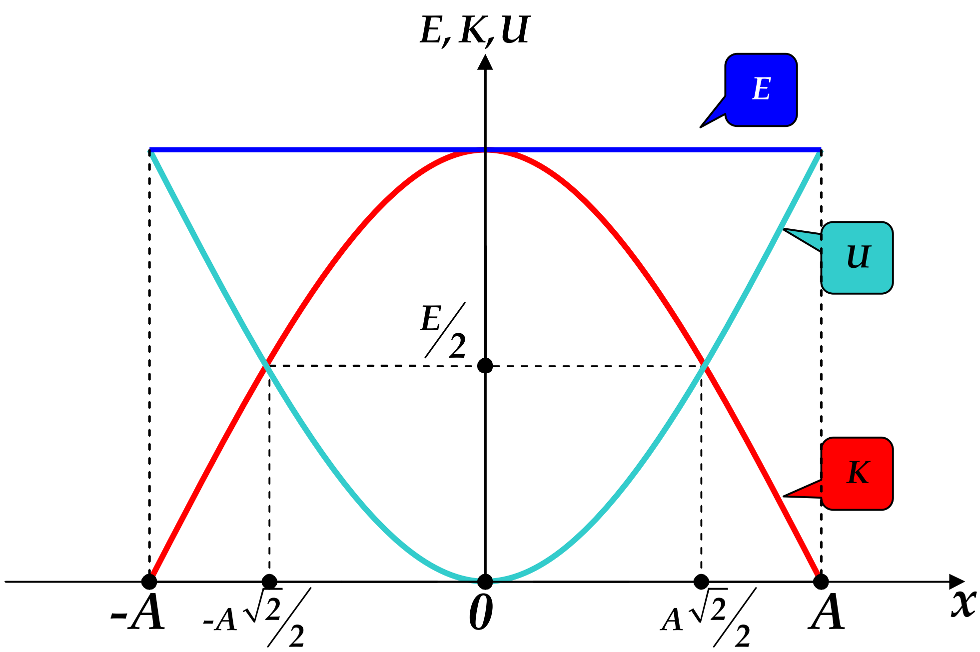
$$U = \frac{1}{2} D \cdot x^2 \quad \text{με} \quad -A \le x \le +A$$

Α.Δ.Ε.Τ. : $E = K + U \Rightarrow E = K + \frac{1}{2} D \cdot x^2 \Rightarrow$

$$K = E - \frac{1}{2} D \cdot x^2 \quad \text{με} \quad -A \le x \le +A$$

Διαγράμματα

Στην περίπτωση που ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση (με ή χωρίς αρχική φάση) τα διαγράμματα της ολικής, της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης σε σχέση με την απομάκρυνση είναι:



Η κινητική και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίσες μεταξύ τους όταν το σώμα βρίσκεται στις θέσεις όπου:

Α.Δ.Ε.Τ. : $E = K + U \overset{K=U}{\Rightarrow} E = U + U \Rightarrow E = 2U \Rightarrow \frac{1}{2} D \cdot A^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} D \cdot x^2 \Rightarrow$

$x^2 = \frac{A^2}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{A}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\boxed{x = \pm \frac{A\sqrt{2}}{2}}$$

- *Εξίσωση κινητικής ενέργειας – ταχύτητας (K-υ) & εξίσωση δυναμικής ενέργειας – ταχύτητας (U-υ)*

Η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

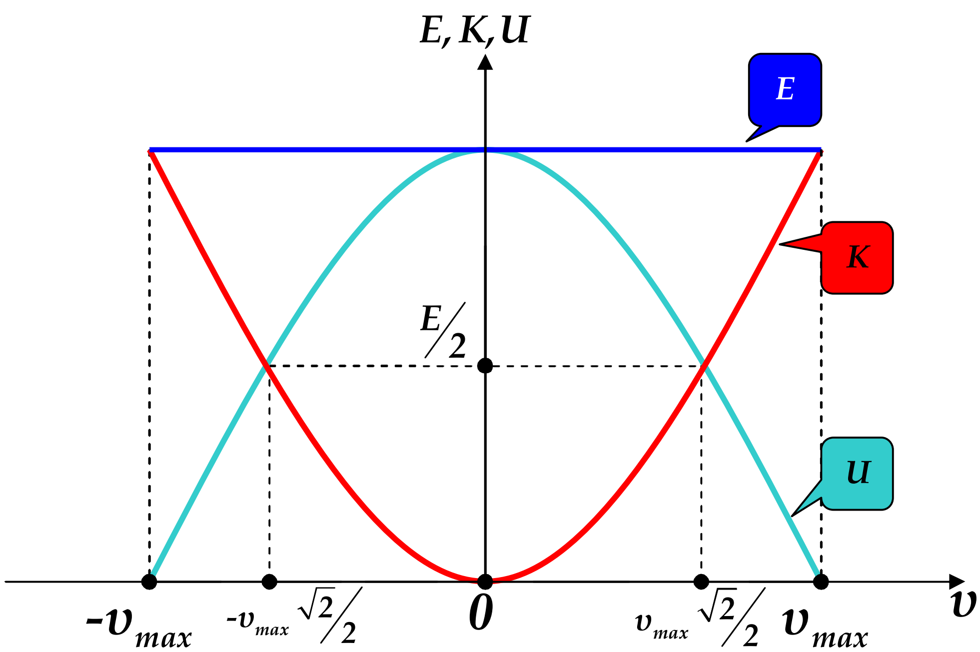
$$\boldsymbol{K = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2} \quad \text{με} \quad \boldsymbol{-\upsilon_{max} \le \upsilon \le +\upsilon_{max}}$$

Α.Δ.Ε.Τ. : $E = K + U \Rightarrow E = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + U \Rightarrow$

$$\boldsymbol{U = E - \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2} \quad \text{με} \quad \boldsymbol{-\upsilon_{max} \le \upsilon \le +\upsilon_{max}}$$

Διαγράμματα

Στην περίπτωση που ένα σώμα κάνει απλή αρμονική ταλάντωση (με ή χωρίς αρχική φάση) τα διαγράμματα της ολικής, της κινητικής και της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης σε σχέση με την ταχύτητα του σώματος είναι:



Η κινητική και η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι ίσες μεταξύ τους όταν το σώμα βρίσκεται στις θέσεις όπου η ταχύτητά του είναι:

Α.Δ.Ε.Τ. : $E = K + U \overset{U=K}{\Rightarrow} E = K + K \Rightarrow E = 2K \Rightarrow \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{max}^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 \Rightarrow$

$\upsilon^2 = \frac{\upsilon_{max}^2}{2} \Rightarrow \upsilon = \pm \frac{\upsilon_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$\boxed{\boldsymbol{\upsilon = \pm \frac{\upsilon_{max}\sqrt{2}}{2}}}$$

<u>Παρατήρηση</u>: Η σχέση $\boldsymbol{\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}$ μπορεί να αποδειχτεί πολύ πιο εύκολα με τη βοήθεια της αρχής διατήρησης ενέργειας ταλάντωσης:

Α.Δ.Ε.Τ. :

$$E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}D\cdot A^2 = \frac{1}{2}m\cdot\upsilon^2 + \frac{1}{2}D\cdot x^2 \overset{D=m\cdot\omega^2}{\Rightarrow} m\cdot\omega^2\cdot A^2 = m\cdot\upsilon^2 + m\cdot\omega^2\cdot x^2 \Rightarrow$$

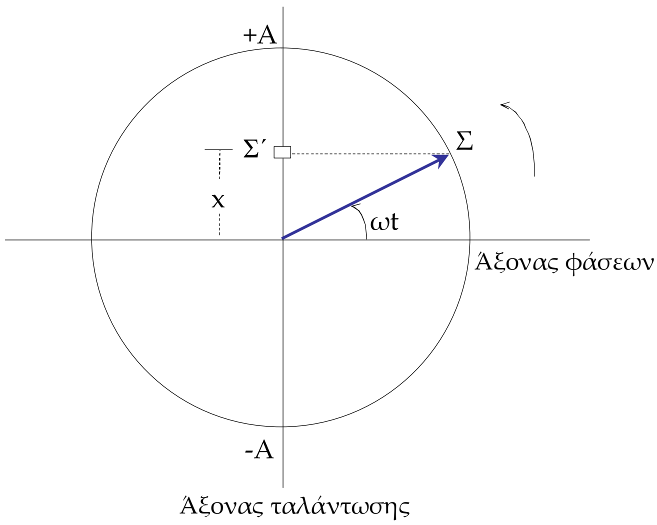
$$\upsilon^2 = \omega^2\cdot A^2 - \omega^2\cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{\upsilon = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}}}$$

3. Το περιστρεφόμενο διάνυσμα

Θα αποδείξουμε ότι:

Αν ένα σώμα Σ κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας Α τότε η προβολή του Σ′ στον άξονα yy′ κάνει Α.Α.Τ.



Πράγματι από το σχήμα έχουμε:

ΟΣ′ = ΟΣημφ ⇔ x = Αημφ ⇔ x = Αημωt

Αφού φ=ωt λόγω της ομαλής κυκλικής κίνησης του Σ.

Αυτό μπορεί να διατυπωθεί διαφορετικά:

Αν ένα σώμα κάνει Α.Α.Τ. με πλάτος Α μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα άλλο σώμα το οποίο κάνει ομαλή κυκλική κίνηση σε κύκλο ακτίνας Α, με κέντρο τη θέση ισορροπίας.

Άρα:

Για κάθε σώμα που κάνει ταλάντωση x = Αημωt μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα μέτρου Α και γωνιακής ταχύτητας ω.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

- Όταν δίνεται η απόσταση d των ακραίων θέσεων της ταλάντωσης, τότε το πλάτος Α θα είναι:

$$\mathbf{A = \frac{d}{2}}$$

- Όταν ένας ταλαντωτής απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας του κατά x και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερος, τότε το πλάτος της ταλάντωσής του θα είναι ίσο με την αρχική αυτή απομάκρυνση x, δηλαδή: $\mathbf{A = x}$
- Όταν ένας ταλαντωτής ισορροπεί(δηλαδή βρίσκεται στη Θ.Ι. του) και με κάποιο τρόπο αποκτήσει ταχύτητα υ, τότε η ταχύτητα του αυτή θα είναι ίση με την μέγιστη της ταλάντωσης που θα εκτελέσει δηλαδή: $\boldsymbol{\upsilon_{max} = \upsilon}$
- Όταν μας ζητείται η χρονική εξίσωση ενός μεγέθους της ταλάντωσης (π.χ. x, υ, α, F, K, U), τότε γράφουμε στη γενικότερη μορφή της την εξίσωση που προβλέπει η θεωρία για το μέγεθος αυτό και υπολογίζουμε τις τιμές των στοιχείων της εξίσωσης (στο ίδιο σύστημα μονάδων) από τα δεδομένα της άσκησης.

  Π.χ. για την εξίσωση $\alpha = -\omega^2 A \cdot \eta\mu\left(\omega t + \phi_0\right)$ πρέπει από τα δεδομένα της άσκησης να υπολογίσουμε τις τιμές των ω, A, ϕ_0.
- Αν δίνεται η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης ή κάποιου άλλου μεγέθους της ταλάντωσης(ταχύτητας, επιτάχυνσης, δύναμης, δυναμικής ή κινητικής ενέργειας), τότε από τη σύγκρισή της με την αντίστοιχη της θεωρίας προσδιορίζονται ορισμένα μεγέθη της ταλάντωσης καθώς επίσης και οι εξισώσεις όλων των υπόλοιπων μεγεθών της ταλάντωσης.

  Π.χ. έστω ότι η εξίσωση της απομάκρυνσης ενός ταλαντωμένου σώματος είναι $x = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \pi/3\right)$ (S.I.) τότε:

$$x = 0{,}1 \cdot \eta\mu\left(20\pi t + \pi/3\right)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x = A \cdot \eta\mu\left(\omega\ t + \phi_0\right)$$

άρα A=0,1 m, ω=2π rad/sec και $\phi_0 = \pi/3\,rad$

Έτσι η εξίσωση της ταχύτητας θα είναι:

$\upsilon = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \phi_0\right) \Rightarrow \upsilon = 0{,}2\pi \cdot \sigma\upsilon\nu\left(20\pi t + \pi/3\right)$

Διαφορά φάσης και χρονική διαφορά μεταξύ των μεγεθών της ταλάντωσης.

Διαφορά φάσης δύο αρμονικά μεταβαλλόμενων μεγεθών λέγεται η διαφορά των φάσεών τους. Όταν τα δύο μεγέθη έχουν την ίδια γωνιακή συχνότητα ω, τότε η διαφορά φάσης τους είναι σταθερή. Για να βρούμε τη διαφορά φάσης δύο μεγεθών, πρέπει τα δύο μεγέθη να εκφράζονται με τον ίδιο τριγωνομετρικό αριθμό και να έχουν θετικές μέγιστες τιμές (ή αρνητικές).

Έστω $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ η εξίσωση της απομάκρυνσης, τότε:

$$\sigma\upsilon\nu\phi = \eta\mu\left(\phi + \pi/2\right)$$

$$\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0 + \pi/2)}$$

$$\alpha = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0) \Rightarrow \boxed{\alpha = \alpha_{max} \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0 + \pi)}$$

$$-\eta\mu\phi = \eta\mu\left(\phi + \pi\right)$$

Δηλαδή η ταχύτητα προηγείται σε φάση της απομάκρυνσης κατά

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\phi_{\upsilon,x} = \phi_\upsilon - \phi_x = \pi/2}}$$

η επιτάχυνση προηγείται σε φάση της απομάκρυνσης κατά

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\phi_{a,x} = \phi_a - \phi_x = \pi}}$$

και η επιτάχυνση προηγείται σε φάση της ταχύτητας κατά

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta\phi_{a,\upsilon} = \phi_\alpha - \phi_\upsilon = \pi/2}}$$

Αυτές οι διαφορές φάσης ερμηνεύονται ως εξής:

Όταν κάποιο μέγεθος, ας πούμε η ταχύτητα, πάρει ορισμένη τιμή $\upsilon = +\upsilon_{max}$, η απομάκρυνση θα πάρει την αντίστοιχη τιμή $x = +A$, μετά από χρόνο Δt που αντιστοιχεί στη διαφορά φάσης των μεγεθών.

Η χρονική διαφορά Δt

α) Μεταξύ ταχύτητας – απομάκρυνσης:

$$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2\pi} \cdot \Delta\phi \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{T}{4}}$$

β) Μεταξύ επιτάχυνσης – απομάκρυνσης:

$$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2\pi} \cdot \Delta\phi \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2\pi} \cdot \pi \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{T}{2}}$$

γ) Μεταξύ επιτάχυνσης – ταχύτητας:

$$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2\pi} \cdot \Delta\phi \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{T}{4}}$$

Αρχική φάση ταλάντωσης

Ένα σύστημα που εκτελεί Α.Α.Τ. έχει αρχική φάση $\boldsymbol{\phi_0}$ στις παρακάτω πιο συνηθισμένες περιπτώσεις:

α) Για $t = 0 \rightarrow x \neq 0$

β) Για $t = 0 \rightarrow a \neq 0$

γ) Για $t = 0 \rightarrow \upsilon_{max} \neq 0$

δ) Για $t = 0 \rightarrow U \neq 0$

ε) Για $t = 0 \rightarrow K \neq K_{max}$

στ) Για $t \neq 0$ με $t \neq \kappa T$, $\kappa = 1, 2, 3, ... \rightarrow x = 0$

ζ) Όταν η εξίσωση της απομάκρυνσης δεν είναι της μορφής $x = A \cdot \eta\mu\omega t$ ή η εξίσωση της ταχύτητας δεν είναι της μορφής $\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t$ ή η εξίσωση της επιτάχυνσης δεν είναι της μορφής $\alpha = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu\omega t$.

Γενικά ένα σώμα <u>δεν</u> έχει αρχική φάση όταν τη χρονική στιγμή t=0 το σώμα βρίσκεται στη Θ.Ι. του και έχει θετική ταχύτητα.

<u>Υπολογισμός αρχικής φάσης ταλάντωσης</u>

Για να βρούμε την αρχική φάση της ταλάντωσης θα πρέπει να γνωρίζουμε από ποια θέση ξεκινά η ταλάντωση (δηλαδή την τιμή του x όταν t = 0) και τη φορά κίνησης του σώματος (δηλαδή αν u > 0 ή u < 0).

<u>**Α΄ τρόπος** (με τη βοήθεια των εξισώσεων των μεγεθών της ταλάντωσης)</u>

<u>Βήμα 1</u>: Στην εξίσωση της ταλάντωσης, $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$, αντικαθιστούμε για t = 0 την τιμή του x, οπότε καταλήγουμε σε τριγωνομετρική εξίσωση της μορφής $\eta\mu\phi_0 = \eta\mu\theta$.

<u>Βήμα 2</u>: Επιλύουμε την τριγωνομετρική εξίσωση και καταλήγουμε σε 2 γενικές λύσεις.

<u>Βήμα 3</u>: Θέτουμε κ = 0 στις 2 γενικές λύσεις οπότε παίρνουμε 2 τιμές για την αρχική φάση ϕ_0.

<u>Βήμα 4</u>: Με τη βοήθεια της εξίσωσης της ταχύτητας της ταλάντωσης ελέγχουμε και τις 2 λύσεις που προέκυψαν και κάνουμε δεκτή αυτή που επαληθεύει τον περιορισμό που αναφέρεται στη φορά κίνησης του σώματος, όπως προκύπτει από την εκφώνηση.

<u>Βήμα 5</u>: Αν απορριφθούν και οι 2 λύσεις, θέτουμε κ = 1 στις γενικές λύσεις και ελέγχουμε και πάλι τις 2 νέες τιμές της ϕ_0.

<u>Προσοχή!!!</u> $0 \leq \phi_0 < 2\pi$

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Να βρεθεί η αρχική φάση, αν για t = 0 είναι $x = -\frac{A}{2}$ και υ < 0.

Λύση

Στη γενική εξίσωση της ταλάντωσης, $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$, θέτουμε t = 0 και $x = -\frac{A}{2}$ οπότε έχουμε $-\frac{A}{2} = A \cdot \eta\mu\phi_0$ άρα $\eta\mu\phi_0 = -\frac{1}{2}$ δηλαδή $\eta\mu\phi_0 = -\eta\mu\frac{\pi}{6}$ άρα $\eta\mu\phi_0 = \eta\mu(-\frac{\pi}{6})$.

Λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση που προέκυψε και καταλήγουμε στις 2 γενικές λύσεις.

$\phi_0 = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ (1) και $\phi_0 = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$ (2)

Στις (1) και (2) θέτουμε κ = 0 οπότε παίρνουμε $\phi_0 = -\frac{\pi}{6}$ (απορρίπτεται διότι $0 \le \phi_0 < 2\pi$) και $\phi_0 = \pi + \frac{\pi}{6}$.

Ελέγχουμε τη λύση $\phi_0 = \pi + \frac{\pi}{6}$. Με βάση την εκφώνηση για t = 0 είναι υ < 0.

Παίρνουμε την εξίσωση της ταχύτητας της ταλάντωσης $\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$. Για t = 0 έχουμε $\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\phi_0$. Θέτουμε $\phi_0 = \pi + \frac{\pi}{6}$ οπότε θα έχουμε $\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{6})$. Όμως $\sigma\upsilon\nu(\pi + \frac{\pi}{6}) < 0$ άρα υ < 0 άρα η $\boxed{\phi_0 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} rad}$ είναι δεκτή.

Β΄ τρόπος <u>(με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος)</u>

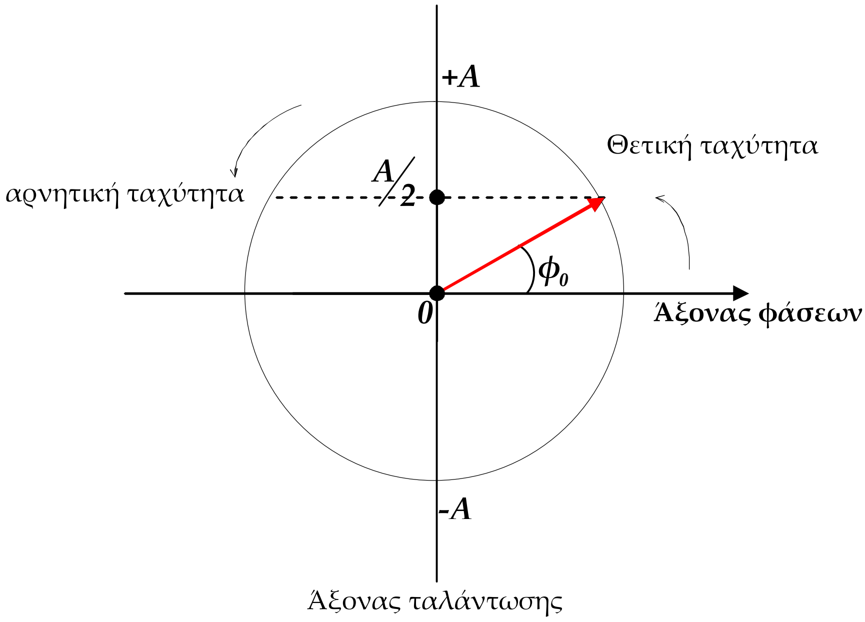
<u>Βήμα 1</u>: Ζωγραφίσουμε το σώμα στη θέση x_1 που βρίσκεται τη χρονική στιγμή t=0. Σχεδιάζουμε το περιστρεφόμενο διάνυσμα που αντιστοιχεί στη θέση αυτή x_1. Προσέχουμε γιατί σε κάθε θέση που βρίσκεται το σώμα υπάρχουν δύο θέσεις για το περιστρεφόμενο διάνυσμα: μία όταν ανεβαίνει το σώμα (θετική ταχύτητα) και μία όταν κατεβαίνει το σώμα (αρνητική ταχύτητα).

<u>Βήμα 2</u> : Υπολογίζουμε τη γωνία που σχηματίζει το περιστρεφόμενο διάνυσμα με τον άξονα των φάσεων όταν αυτό στραφεί με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Αυτή θα είναι και η αρχική φάση της ταλάντωσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί η αρχική φάση, αν για t = 0 είναι $x = \frac{A}{2}$ και υ > 0.

Λύση



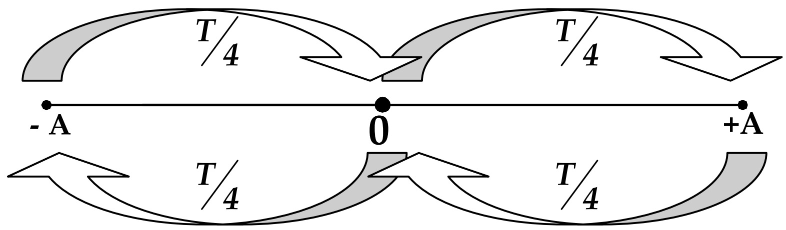
$$\eta\mu\phi_0 = \frac{A/2}{A} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\phi_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi_0 = \frac{\pi}{6} rad}$$

<u>Υπολογισμός χρονικών διαστημάτων στην ταλάντωση</u>

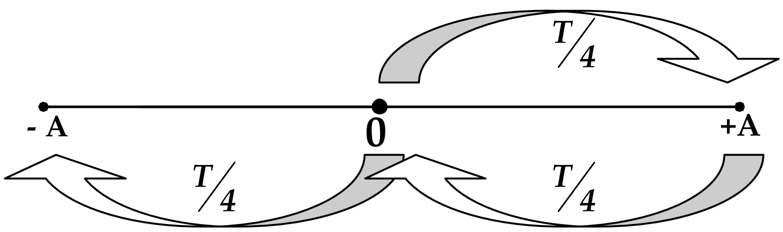
***1η περίπτωση*:** Για την εύρεση του χρόνου μετάβασης από μια θέση σε μια άλλη, αν η αρχική και η τελική θέση είναι θέση ισορροπίας ή ακραία θέση, τότε η ζητούμενη χρονική διάρκεια είναι κάποιο ακέραιο πολλαπλάσιο του $T/4$ ($\Delta t = \kappa \cdot \frac{T}{4}$ με $\kappa=1,2,3,\ldots$). Αυτό συμβαίνει διότι για την απευθείας κίνηση από τη Θ.Ι. στην ακραία θέση ή αντίστροφα απαιτείται χρόνος $T/4$.



<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. χωρίς αρχική φάση. Να βρεθεί το χρονικό διάστημα που απαιτείται για τη μετάβαση του σώματος από τη Θ.Ι. στην ακραία θέση –Α για πρώτη φορά.

<u>Λύση</u>



$$\boxed{\Delta t = 3T/4}$$

$2^{η}$ ***περίπτωση*:** Για την εύρεση του χρόνου μετάβασης από μια θέση x_1 σε μια άλλη x_2, αν ή η αρχική ή η τελική θέση ή και οι δύο δεν είναι ούτε θέση ισορροπίας ούτε ακραία θέση, τότε υπάρχουν 2 τρόποι λύσης.

Α΄ **τρόπος** (με τη βοήθεια της εξίσωσης απομάκρυνσης της ταλάντωσης)

Βήμα 1: Βρίσκουμε την εξίσωση της απομάκρυνσης του σώματος (αν δεν δίνεται) προσέχοντας αν έχουμε αρχική φάση.

Βήμα 2: Υπολογίζουμε το χρόνο μετάβασης του σώματος από την αρχική του θέση στη θέση x_1 και έπειτα το χρόνο μετάβασης του σώματος από την αρχική του θέση στη θέση x_2.

Βήμα 3: Τέλος αφαιρούμε τους δύο χρόνους.

Παρατήρηση: Για τον υπολογισμό του χρόνου από την αρχική θέση του σώματος σε μια άλλη x_1, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της απομάκρυνσης όπου $x \to x_1$ και λύνουμε την τριγωνομετρική εξίσωση ως προς το χρόνο. Προσέχουμε ότι έχουμε 2 μορφές λύσεων. Από τα δεδομένα της άσκησης και από τον περιορισμό ότι $\boldsymbol{t > 0}$ υπολογίζουμε τον χρόνο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. με εξίσωση $x = 0,2 \cdot ημ\left(\frac{π}{3}t + \frac{π}{2}\right)$ (S.I.). Να βρείτε ποια χρονική στιγμή το σώμα διέρχεται για τρίτη φορά μετά την $\mathrm{t} = 0$ από τη θέση $x_1 = +0,1\,m$.

Λύση

$$x = 0,2 \cdot ημ\left(\frac{π}{3}t + \frac{π}{2}\right) \overset{x=x_1=0,1}{\Rightarrow} 0,1 = 0,2 \cdot ημ\left(\frac{π}{3}t + \frac{π}{2}\right) \Rightarrow ημ\left(\frac{π}{3}t + \frac{π}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$ημ\left(\frac{π}{3}t + \frac{π}{2}\right) = ημ\frac{π}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^{η} \text{ ομάδα λύσεων: } \frac{π}{3}t + \frac{π}{2} = 2κπ + \frac{π}{6} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{t = 6κ - 1}} \\ 2^{η} \text{ ομάδα λύσεων: } \frac{π}{3}t + \frac{π}{2} = 2κπ + π - \frac{π}{6} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{t = 6κ + 1}} \end{array}\right\} \Rightarrow κ = 0,1,2,\ldots$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε και στις δύο ομάδες λύσεων όπου κ=0,1,2,… και κατατάσσουμε τις θετικές τιμές που βρίσκουμε κατά αύξουσα σειρά. Έτσι προκύπτουν οι τιμές:

$t_1 = 1\,sec, t_2 = 5\,sec, t_3 = 7\,sec, \ldots$

Δεκτή τελικά είναι η $t_3 = 7\,sec$ αφού θέλουμε το σώμα να διέρχεται για τρίτη φορά από τη θέση x_1.

Β΄ τρόπος (με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος)

Βήμα 1: Ζωγραφίσουμε το σώμα στην αρχική του θέση x_1. Σχεδιάζουμε το περιστρεφόμενο διάνυσμα που αντιστοιχεί στη θέση αυτή x_1. Προσέχουμε γιατί σε κάθε θέση που βρίσκεται το σώμα υπάρχουν δύο θέσεις για το περιστρεφόμενο διάνυσμα: μία όταν ανεβαίνει το σώμα (θετική ταχύτητα) και μία όταν κατεβαίνει το σώμα (αρνητική ταχύτητα).

Βήμα 2: Σχεδιάζουμε στο ίδιο σχήμα την τελική θέση του σώματος x_2 και το αντίστοιχο περιστρεφόμενο διάνυσμα.

Βήμα 3: Υπολογίζουμε από τα σχήματα που δημιουργήθηκαν τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των περιστρεφόμενων διανυσμάτων και κάποιου άξονα.

Βήμα 4: Υπολογίζουμε την γωνία Δφ που γράφει το περιστρεφόμενο διάνυσμα για να μεταβεί από την αρχική στην τελική θέση του.

Βήμα 5: Τέλος από τη σχέση $\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{T}{2\pi} \cdot \Delta\phi}$ υπολογίζουμε το χρονικό διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί το χρονικό διάστημα για να μεταβεί ένα σώμα από την θέση x_1=2 m και υ>0 στη θέση $x_2 = -2\sqrt{3}$ m για πρώτη φορά. Το σώμα κάνει Α.Α.Τ. με πλάτος Α= 4 m και περίοδο Τ=2 sec χωρίς αρχική φάση.

Λύση

Α΄ τρόπος

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{2} \Rightarrow \omega = \pi \, rad/sec$$

$$x = 4 \cdot \eta\mu\pi t \overset{x=x_1=2}{\Rightarrow} 2 = 4 \cdot \eta\mu\pi t \Rightarrow \eta\mu\pi t = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu\pi t = \eta\mu\frac{\pi}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1^{\eta} \text{ ομάδα λύσεων: } \pi t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{t = 2\kappa + \frac{1}{6}}} \\ 2^{\eta} \text{ ομάδα λύσεων: } \pi t = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{t = 2\kappa + \frac{5}{6}}} \end{array}\right\} \Rightarrow \kappa = 0, 1, 2, \ldots$$

Για κ=0 στην 1^{η} ομάδα λύσεων παίρνουμε τη ζητούμενη τιμή του χρόνου. Άρα $t_1 = \frac{1}{6} sec$.

Ομοίως:

$$x = 4 \cdot \eta\mu\pi t \overset{x=x_2=-2\sqrt{3}}{\Rightarrow} -2\sqrt{3} = 4 \cdot \eta\mu\pi t \Rightarrow \eta\mu\pi t = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \eta\mu\pi t = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

1η ομάδα λύσεων: $\pi t = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{t = 2\kappa - \frac{1}{3}}$

2η ομάδα λύσεων: $\pi t = 2\kappa\pi + \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{t = 2\kappa + \frac{4}{3}}$

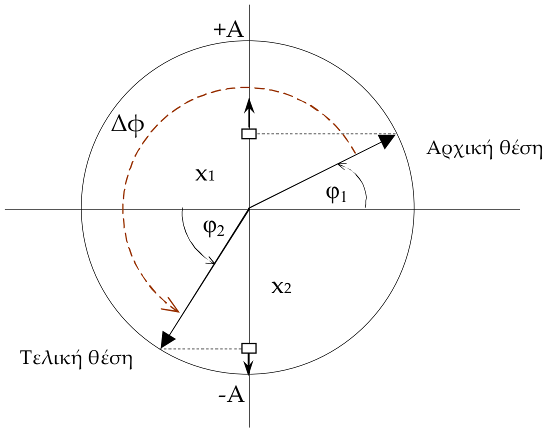
$\Rightarrow \kappa = 0, 1, 2, \ldots$

Για κ=1 στην 2η ομάδα λύσεων παίρνουμε τη ζητούμενη τιμή του χρόνου. Άρα $t_2 = \frac{4}{3} sec$.

Άρα $\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{7}{6} sec}$

<u>Β΄ τρόπος</u>

Το σώμα θα πάει από την θέση x_1 στην ακραία θέση +Α και μετά θα κατέβει προς τη θέση x_2 και θα βρεθεί στη θέση x_2 με αρνητική ταχύτητα.



Από το διπλανό σχήμα έχουμε:

ημ$\phi_1 = \frac{x_1}{A} \Leftrightarrow \phi_1 = \pi/6$

ημ$\phi_2 = \frac{x_2}{A} \Leftrightarrow \phi_2 = \pi/3$

Άρα από την αρχική μέχρι την τελική θέση θα είναι γωνία

$\Delta\phi = \pi/3 + \pi/2 + \pi/3 = 7\pi/6$ rad.

$$\Delta\phi = \omega \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{T}{2\pi} \cdot \Delta\phi \Rightarrow \Delta t = \frac{2}{2\cancel{\pi}} \cdot \frac{7\cancel{\pi}}{6} \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{7}{6} sec}$$

Γενική παρατήρηση

Παρατηρούμε ότι και για τον υπολογισμό της αρχικής φάσης της ταλάντωσης καθώς και για τον υπολογισμό του χρόνου μετάβασης από μια θέση σε μια άλλη, ο τρόπος υπολογισμού με τη βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος είναι πολύ πιο σύντομος και δεν απαιτεί αρκετή τριγωνομετρία.

Ελατήρια

Τα ελατήρια χρησιμοποιούνται πάρα πολύ στις ασκήσεις με ταλαντώσεις. Η δύναμη που ασκεί ένα ελατήριο δίνεται από τον νόμο του Hooke: $F_{\varepsilon\lambda} = -Kx$ όπου:

K = η σταθερά ελατηρίου

x = η συσπείρωση ή επιμήκυνση του ελατηρίου ***από τη θέση φυσικού μήκους*** (Θ.Φ.Μ.)

Επομένως:

Ένα ελατήριο στη θέση φυσικού μήκους δεν ασκεί καμία δύναμη.

Όσο πιο μεγάλη είναι η μετακίνησή του από την Θ.Φ.Μ. τόσο μεγαλύτερη είναι η δύναμή του.

Ακόμα:

Η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν βρίσκεται σε επιμήκυνση (συσπείρωση) x είναι και αυτή μετρημένη από την θέση φυσικού μήκους Θ.Φ.Μ. και δίνεται από τον τύπο $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}K \cdot x^2$.

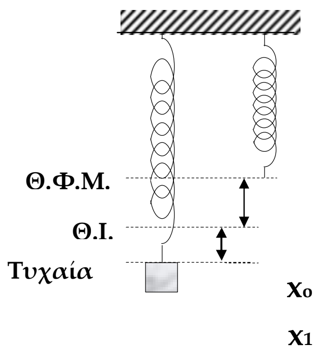
Το έργο της δύναμης του ελατηρίου όταν μετακινούμε την ελεύθερη άκρη του ελατηρίου από μία θέση με συσπείρωση (επιμήκυνση) x_1 σε μία θέση με συσπείρωση (επιμήκυνση) x_2 υπολογίζεται πάντα ως εξής:

$$W = -\Delta U \Rightarrow W = -(U_{\varepsilon\lambda(\tau\varepsilon\lambda)} - U_{\varepsilon\lambda(\alpha\rho\chi)}) \Rightarrow W = U_{\varepsilon\lambda(\alpha\rho\chi)} - U_{\varepsilon\lambda(\tau\varepsilon\lambda)}$$

Ή $\quad W_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}K \cdot x_1^2 - \frac{1}{2}K \cdot x_2^2$

Με λόγια: ***Το έργο της δύναμης του ελατηρίου που το άκρο του μετακινείται από μία αρχική θέση x_1 σε μία τελική θέση x_2 είναι ίσο με την διαφορά αρχικής μείον τελικής δυναμικής ενέργειας ελατηρίου***.

Ο τύπος αυτός ισχύει ΠΑΝΤΑ για το έργο δύναμης ελατηρίου όποια και να είναι η αρχική και η τελική θέση του ελατηρίου.



Στο διπλανό σχήμα το σώμα βρίσκεται σε κάποια τυχαία θέση x_1 κατά την διάρκεια της ταλάντωσής του. Τότε έχουμε:

Ενέργεια ελατηρίου: $U_{\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}K \cdot (x_o + x_1)^2$

Ενέργεια ταλάντωσης: $U_T = \frac{1}{2}K \cdot x_1^2$

Παρατηρούμε ότι $U_{\varepsilon\lambda} \neq U_T$

Επίσης:

Δύναμη ελατηρίου (μέτρο) $F_{\varepsilon\lambda} = K(x_o + x_1)$

Δύναμη ταλάντωσης (μέτρο) $F_T = Dx_1 = Kx_1$

Δηλαδή: ***Τα μεγέθη της ταλάντωσης τα μετράμε από την θέση ισορροπίας Θ.Ι. ενώ τα μεγέθη του ελατηρίου τα μετράμε από την θέση φυσικού μήκους Θ.Φ.Μ.***

Παρατήρηση: όταν το ελατήριο είναι στο οριζόντιο επίπεδο επειδή η Θ.Ι. ταυτίζεται με τη Θ.Φ.Μ. τότε η δύναμη του ελατηρίου και η δύναμη της ταλάντωσης θα έχουν την ίδια τιμή, όπως και η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου με τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης. Σε κάθε άλλη περίπτωση (κατακόρυφο ελατήριο, ελατήριο σε κεκλιμένο επίπεδο) οι τιμές αυτές θα είναι διαφορετικές.

- **Μεθοδολογία για την απόδειξη ότι ένα σώμα κάνει Α.Α.Τ.**

Αρκεί να δείξουμε ότι το σώμα δέχεται δύναμη επαναφοράς δηλαδή της μορφής $F = -Dx$. Τα βήματα που ακολουθούμε είναι:

Βήμα 1: Ζωγραφίζουμε το σχήμα με το σώμα στη θέση ισορροπίας.

Βήμα 2: Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις στη θέση ισορροπίας. Εφαρμόζουμε την σχέση ισορροπίας ΣF=0 και βρίσκουμε μία σχέση για τις δυνάμεις στο σώμα.

Βήμα 3: Ζωγραφίζουμε το σώμα σε μία θέση που απέχει x από τη θέση ισορροπίας. Έχουμε εκτρέψει το σώμα κατά x.

Βήμα 4: Σχεδιάζουμε τις νέες δυνάμεις στη θέση αυτή. Κάποια ή κάποιες δυνάμεις πρέπει να είναι διαφορετικές (μεγαλύτερες ή μικρότερες) από τις προηγούμενες.

Βήμα 5: Υπολογίζουμε την νέα συνισταμένη δύναμη ΣF. Σκοπός μας είναι να την μετατρέψουμε σε μία εξίσωση της μορφής $F = -Dx$ όπου D μία σταθερά (ανεξάρτητη του x). Για να το πετύχουμε θα χρειαστούμε (εν γένει) την εξίσωση που βρήκαμε για τη θέση ισορροπίας. Ως θετικές δυνάμεις λαμβάνουμε εκείνες που έχουν την ίδια φορά με εκείνη που εκτρέψαμε το σώμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για το παρακάτω σχήμα:

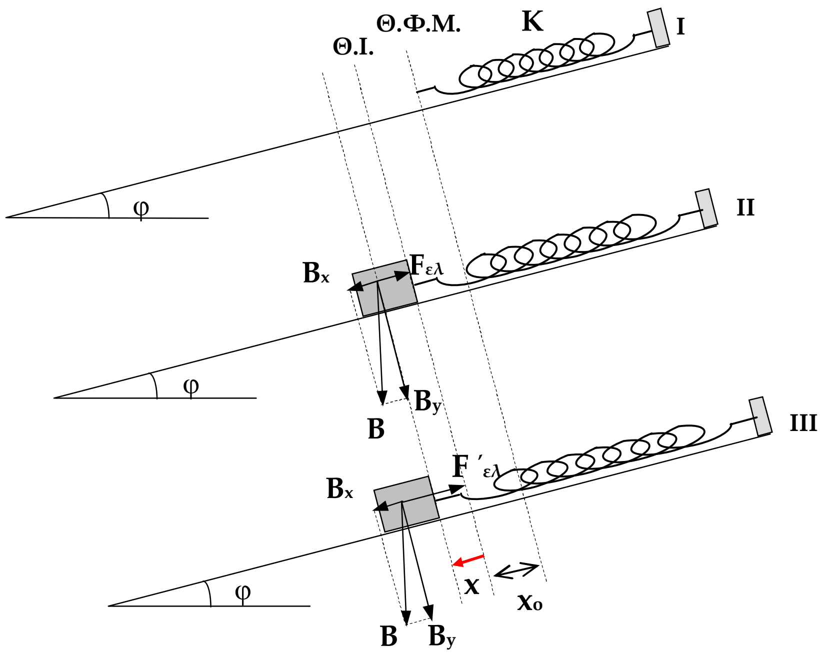
Στη Θ.Ι. : $\Sigma F = 0 \Rightarrow B_x - F_{\varepsilon\lambda} = 0 \Rightarrow B_x = Kx_o$ **(1)**

Τυχαία θέση ΙΙΙ :

$\Sigma F = B_x - F'_{\varepsilon\lambda} \Rightarrow \Sigma F = B_x - K(x_o + x) \Rightarrow \Sigma F = B_x - Kx_o - Kx$ και λόγω της **(1)** είναι

$\Sigma F = -Kx$

Άρα το σώμα κάνει Α.Α.Τ. με D = K



<u>Παρατήρηση 1</u>: Στην περίπτωση του συστήματος ελατήριο – σώμα είτε στο οριζόντιο, είτε στο κεκλιμένο, είτε στο κατακόρυφο επίπεδο αν εκτρέψουμε το σώμα από τη Θ.Ι. του αυτό θα εκτελέσει Α.Α.Τ. με σταθερά επαναφοράς ίση με τη σταθερά του ελατηρίου (D=K).

<u>Παρατήρηση 2</u>: Επίσης ένα σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. αρκεί να αποδείξω ότι η επιτάχυνση και η απομάκρυνσή του συνδέονται με βάση τη σχέση $\alpha = -\omega^2 x$.

- Αν σε μια τυχαία θέση της ταλάντωσης x_1 γνωρίζουμε το μέτρο της ταχύτητας του υ_1, τότε χρησιμοποιούμε την **Α.Δ.Ε.Τ.** και υπολογίζουμε κάποιο μέγεθος όπως το πλάτος, τη σταθερά επαναφοράς ή την κυκλική συχνότητα.

  Α.Δ.Ε.Τ. : $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}D \cdot A^2 = \frac{1}{2}m \cdot \upsilon_1^2 + \frac{1}{2}D \cdot x_1^2$

- Αν μας δίνουν την εξίσωση της απομάκρυνσης ή της ταχύτητας ή της επιτάχυνσης σε σχέση με το χρόνο και <u>δεν</u> είναι της μορφής $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ ή $\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega t + \phi_0)$ ή $\alpha = -\alpha_{max} \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0)$ και θέλουμε να βρούμε τις υπόλοιπες εξισώσεις, πρέπει να έχουμε υπόψιν μας ότι η ταχύτητα προηγείται της απομάκρυνσης κατά $\pi/2\, rad$ ενώ υπολείπεται της επιτάχυνσης κατά $\pi/2\, rad$ όμως ο τριγωνομετρικός αριθμός είναι ο ίδιος.

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u>

Έστω $\upsilon = 5 \cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6})$. Τότε:

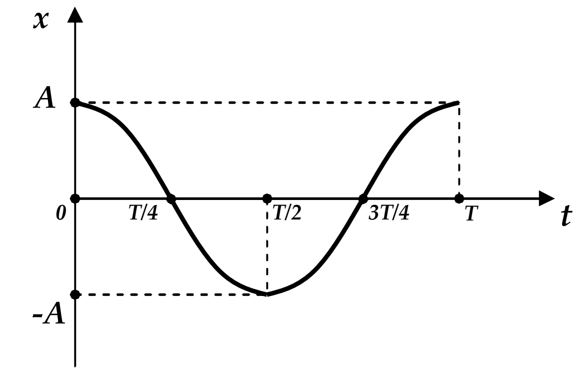
$x = A \cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2})$ και $\alpha = \alpha_{max} \cdot \eta\mu(10t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})$.

Γραφικές παραστάσεις *x=f(t), u=f(t), a=f(t)*

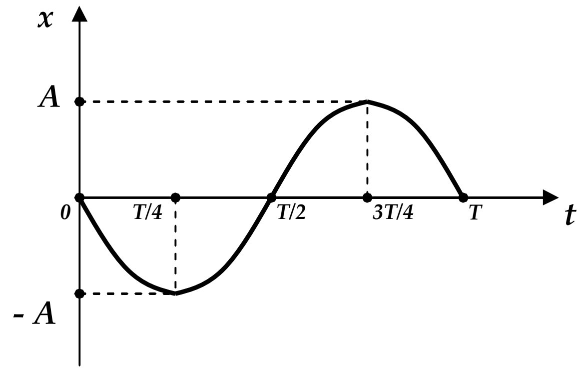
***1η περίπτωση*:** Αν οι εξισώσεις είναι χωρίς αρχική φάση, ή η αρχική φάση είναι π/2, π, 3π/2 τότε τα πράγματα είναι πολύ απλά γιατί οι ζητούμενες γραφικές είναι οι γραφικές παραστάσεις ημίτονου, συνημίτονου και οι αντίθετές τους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

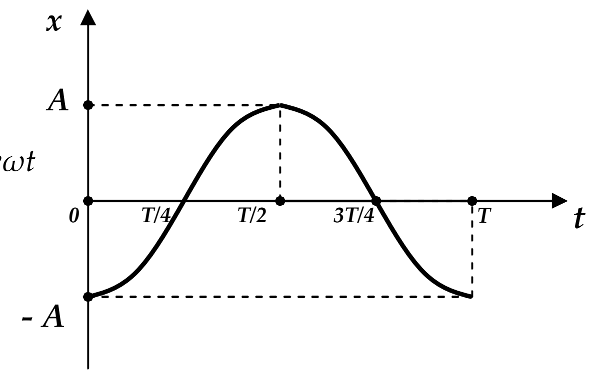
1. $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{2}) = A \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t$



2. $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi) = -A \cdot \eta\mu\omega t$



3. $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \frac{3\pi}{2}) = -A \cdot \sigma\upsilon\nu\omega t$



***2η περίπτωση*:** Αν όμως η αρχική φάση είναι κάποια άλλη, τότε είτε θα πρέπει να καταφύγουμε στην βοήθεια του περιστρεφόμενου διανύσματος είτε θα πρέπει να μπορούμε να δουλεύουμε με μεγάλη άνεση τις τριγωνομετρικές εξισώσεις. Ας δούμε όμως αναλυτικά το τι θα πρέπει ακριβώς να κάνουμε σε κάθε περίπτωση με την μορφή του παρακάτω παραδείγματος.

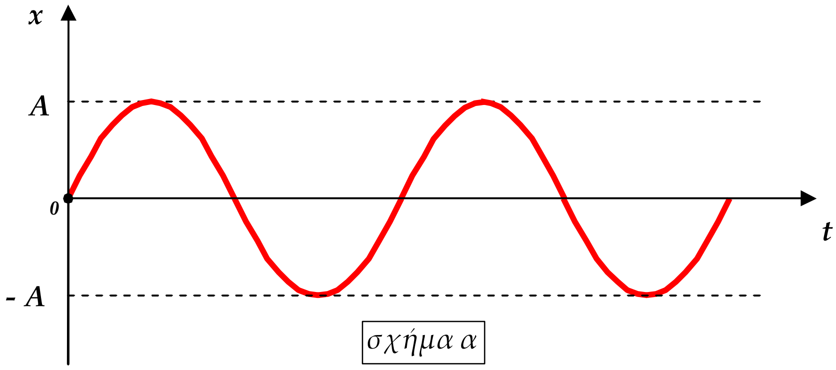
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να γίνουν η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης συναρτήσει του χρόνου της απλής αρμονικής ταλάντωσης υλικού σημείου που περιγράφεται από την εξίσωση απομάκρυνση $x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{3})$.

Α' τρόπος

Θα προσπαθήσουμε να φτιάξουμε την γραφική παράσταση με την βοήθεια της τριγωνομετρίας.

Βήμα 1: Ξεκινάμε πρώτα σχεδιάζοντας την γραφική παράσταση ενός ημιτόνου. Θα πρέπει βέβαια να προσέξουμε ότι η μέγιστη τιμή στην γραφική παράσταση δεν θα είναι η μονάδα, αλλά θα είναι το πλάτος της ταλάντωσης (σχήμα α)



σχήμα α

Βήμα 2: Βάζουμε όπου t=0 και επιλύουμε την εξίσωση απομάκρυνσης βρίσκοντας την θέση του σώματος την t=0, δηλαδή:

$$x = A\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{3}) \overset{t=0}{=} A\eta\mu\frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{x = A\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Βήμα 3: Μετακινούμε τον άξονα y'y μέχρι να «ακουμπήσει» την τιμή που βρήκαμε πριν, δηλαδή στην τιμή $x = A\frac{\sqrt{3}}{2}$. Η θέση αυτή είναι και η σωστή θέση του άξονα γιατί έτσι την t=0 το σώμα βρίσκεται στην θέση $x = A\frac{\sqrt{3}}{2}$ σύμφωνα και με τον ορισμό την αρχικής φάσης. Βέβαια υπάρχουν 2 τιμές $x = A\frac{\sqrt{3}}{2}$, μια πριν την μεγιστοποίηση του πλάτους και μια μετά την μεγιστοποίηση του πλάτους. Για να δούμε ποια θα επιλέξουμε βρίσκουμε την ταχύτητα του σώματος την t=0. Αν υ>0 τότε επιλέγουμε αυτή που είναι αριστερά από την μεγιστοποίηση του πλάτους, διαφορετικά αν υ<0 επιλέγουμε αυτή που είναι δεξιά από τη μεγιστοποίηση του πλάτους. Στην περίπτωσή μας έχουμε:

$$\upsilon = \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) \overset{t=0}{=} \upsilon_{max} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} > 0$$

Άρα επιλέγουμε την τιμή $x = A\frac{\sqrt{3}}{2}$ που είναι αριστερά από την μεγιστοποίηση του πλάτους.

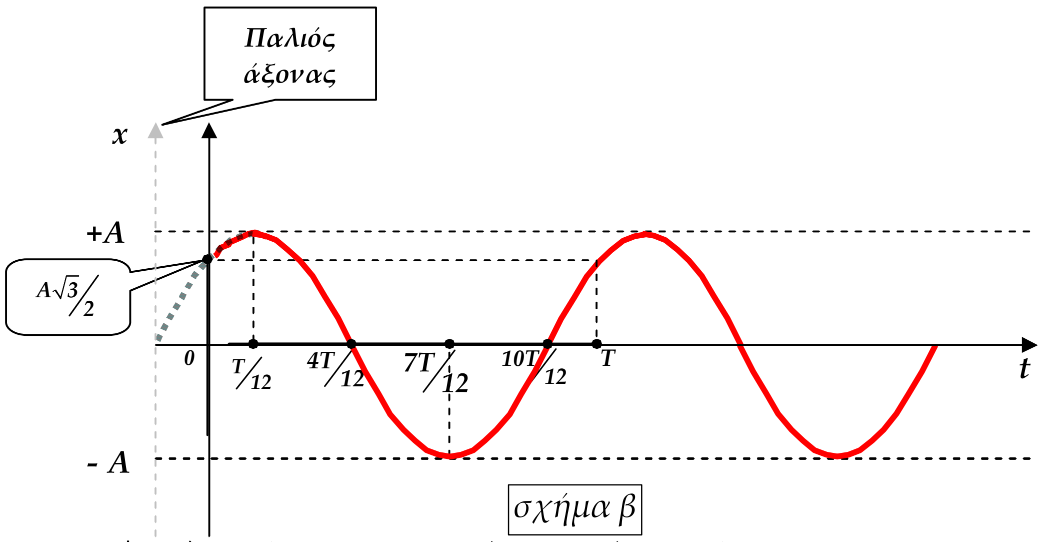
<u>Βήμα 4</u>: Στη συνέχεια θα πρέπει να βάλουμε τις χρονικές στιγμές στον άξονα των χρόνων. Αυτό μπορεί να γίνει επιλύνοντας ξανά την τριγωνομετρική εξίσωση που προκύπτει από την μεγιστοποίηση της απομάκρυνσης:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{3}) \overset{x=A}{\Rightarrow} A = A \cdot \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow \eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow$$

$$\eta\mu(\omega t + \frac{\pi}{3}) = \eta\mu(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \omega t + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \overset{\kappa=0}{\Rightarrow}$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6\omega} \overset{\omega=\frac{2\pi}{T}}{\Rightarrow} \boxed{t = \frac{T}{12}}$$

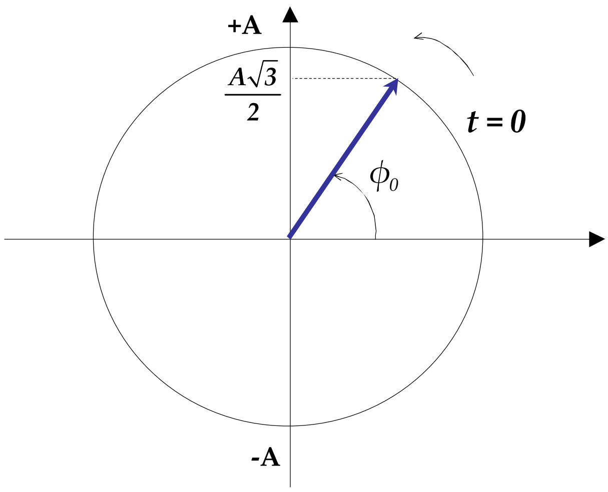
Έτσι έχουμε βρει την χρονική στιγμή που μεγιστοποιείται το πλάτος. Η συνέχεια είναι πολύ απλή. Ο πρώτος μηδενισμός θα συμβεί την χρονική στιγμή $t = \frac{T}{12} + \frac{T}{4} = \frac{T}{3}$. Το σώμα θα βρεθεί στην μέγιστη αρνητική απομάκρυνση (–Α) την χρονική στιγμή $t = \frac{T}{12} + \frac{2T}{4} = \frac{7T}{12}$, θα ξαναπεράσει από την θέση ισορροπίας την $t = \frac{T}{12} + \frac{3T}{4} = \frac{10T}{12} = \frac{5T}{6}$ κ.ο.κ. (σχήμα β). Δηλαδή αφού έχουμε βρει την τιμή που γίνεται η πρώτη μεγιστοποίηση, ο πρώτος μηδενισμός κλπ. (εξαρτάται από την περίπτωση), βρίσκουμε τις υπόλοιπες χρονικές στιγμές προσθέτοντας Τ/4, 2Τ/4, κλπ. Εντελώς αντίστοιχα εργαζόμαστε για τον σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων τόσο της ταχύτητας όσο και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου, προσέχοντας ότι η αρχική συνάρτηση για την ταχύτητα είναι η συνημίτονο ενώ η αρχική συνάρτηση για την επιτάχυνση είναι η αντίθετη του ημιτόνου δηλαδή η (-ημ).



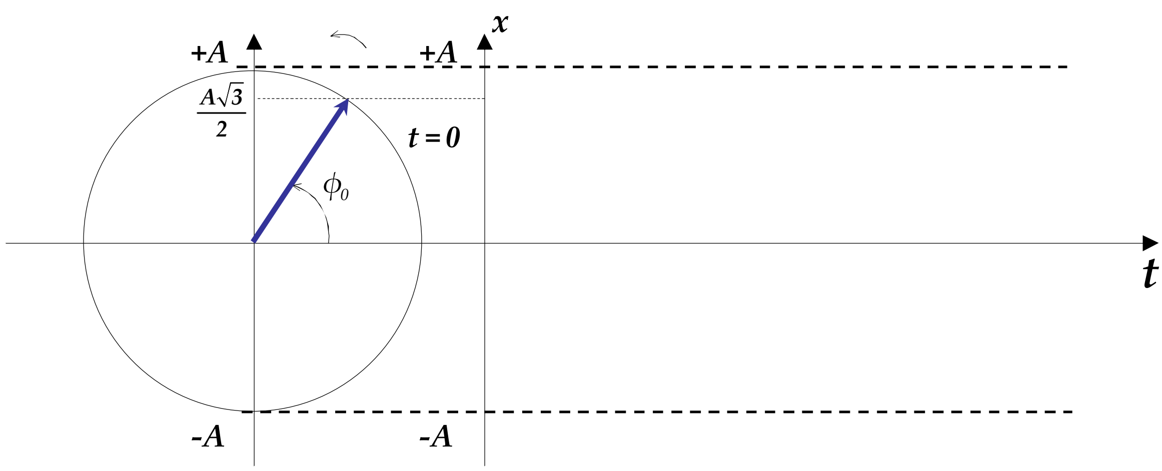
σχήμα β

Β΄ τρόπος (Με περιστρεφόμενο διάνυσμα)

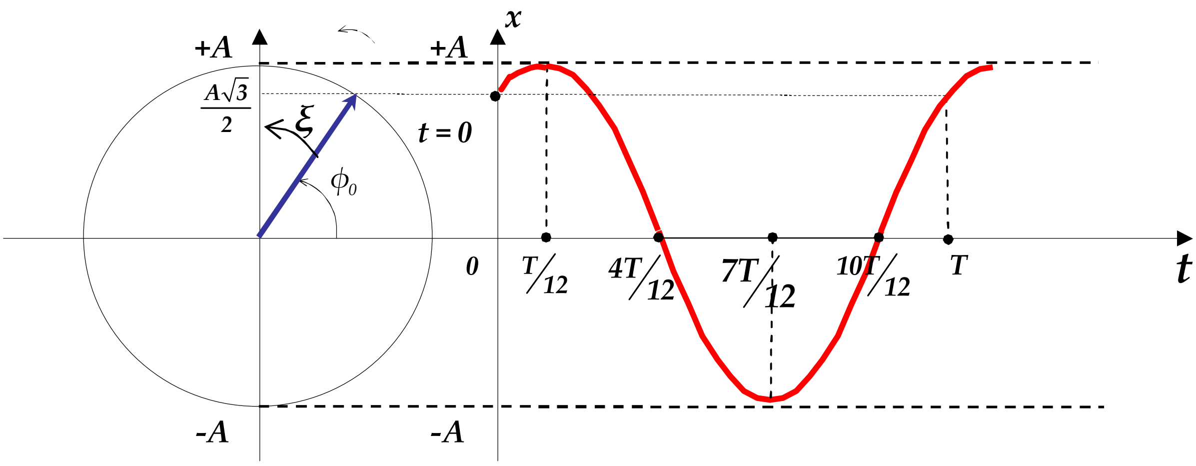
Βήμα 1: Σχεδιάζουμε το στρεφόμενο της απομάκρυνσης την χρονική στιγμή t=0.



Βήμα 2: Με βάση το στρεφόμενο και με την βοήθειά του σχεδιάζουμε τους άξονες. Παρατηρούμε αν η προβολή του στρεφόμενου «ανεβαίνει» ή «κατεβαίνει». Την ίδια ακριβώς πορεία θα ακολουθήσει και η γραφική μας.



Βήμα 3: Βρίσκουμε με βάση το τριγωνάκι που σχηματίζει το στρεφόμενο με τον y'y άξονα τη γωνία ξ. Από αυτήν μπορούμε να βρούμε τον χρόνο: $\xi = \omega t \Rightarrow t = \dfrac{\xi}{\omega}$. Όμως η γωνία ξ στο παράδειγμά μας είναι ξ=π/6 συνεπώς ο χρόνος θα είναι $t = \dfrac{\xi}{\omega} \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{6\omega} \overset{\omega=\frac{2\pi}{T}}{\Rightarrow} t = \dfrac{T}{12}$.
Η χρονική αυτή στιγμή είναι εκείνη στην οποία η απομάκρυνση γίνεται μέγιστη για πρώτη φορά. Η συνέχεια είναι γνωστή: συμπληρώνουμε τον άξονα των χρόνων προσθέτοντας Τ/4, κλπ.
Ας μην ξεχνάμε βέβαια ότι στο στρεφόμενο διάνυσμα η ταχύτητα αναπαρίσταται με ένα στρεφόμενο κάθετο σε αυτό της απομάκρυνσης και πάντα στο πιο μπροστά τεταρτημόριο. Έτσι μπορούμε να σχεδιάσουμε και το στρεφόμενο της ταχύτητας άρα να κάνουμε την γραφική της παράσταση με αντίστοιχο τρόπο.



Όταν θέλουμε να βρούμε σε ποια θέση ή ποια χρονική στιγμή ο λόγος της δυναμικής προς την κινητική ενέργεια της ταλάντωσης έχει μια συγκεκριμένη τιμή λ, εφαρμόζουμε την Α.Δ.Ε.Τ. και βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ της στιγμιαίας δυναμικής με την μέγιστη δυναμική (αν θέλουμε απομάκρυνση), ή μεταξύ της στιγμιαίας κινητικής με την μέγιστη κινητική (αν θέλουμε ταχύτητα).
Δηλαδή αν θέλουμε να βρούμε σε ποια θέση ισχύει $U = \lambda \cdot K$ τότε:

$$U + K = U_{max} \overset{U=\lambda\cdot K \Rightarrow K=U/\lambda}{\Rightarrow} U + \frac{U}{\lambda} = U_{max} \Rightarrow \frac{1}{2}D\cdot x^2 + \frac{\frac{1}{2}D\cdot x^2}{\lambda} = \frac{1}{2}D\cdot A^2 \Rightarrow$$

$$x^2 + \frac{x^2}{\lambda} = A^2$$ και λύνουμε ως προς x.

Αν θέλουμε να βρούμε τι ταχύτητα έχει το σώμα όταν ισχύει $U = \lambda \cdot K$ τότε:

$$U + K = K_{max} \overset{U=\lambda\cdot K}{\Rightarrow} \lambda K + K = K_{max} \Rightarrow \lambda \cdot \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 + \frac{1}{2} m \cdot \upsilon^2 = \frac{1}{2} m \cdot \upsilon_{max}^2 \Rightarrow$$

$\lambda \cdot \upsilon^2 + \upsilon^2 = \upsilon_{max}^2$ και λύνουμε ως προς υ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ.. Να βρεθεί σε ποια θέση η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής

Λύση

$$U + K = U_{max} \overset{K=3U}{\Rightarrow} U + 3U = U_{max} \Rightarrow 4U = U_{max} \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} D \cdot x^2 = \frac{1}{2} D \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$4 \cdot x^2 = A^2 \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{4} \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{A}{2}}$$

ΣΩΜΑΤΑ ΠΟΥ ΒΡΙΣΚΟΝΤΑΙ ΣΕ *ΕΠΑΦΗ* ΚΑΙ ΕΚΤΕΛΟΥΝ Α.Α.Τ.

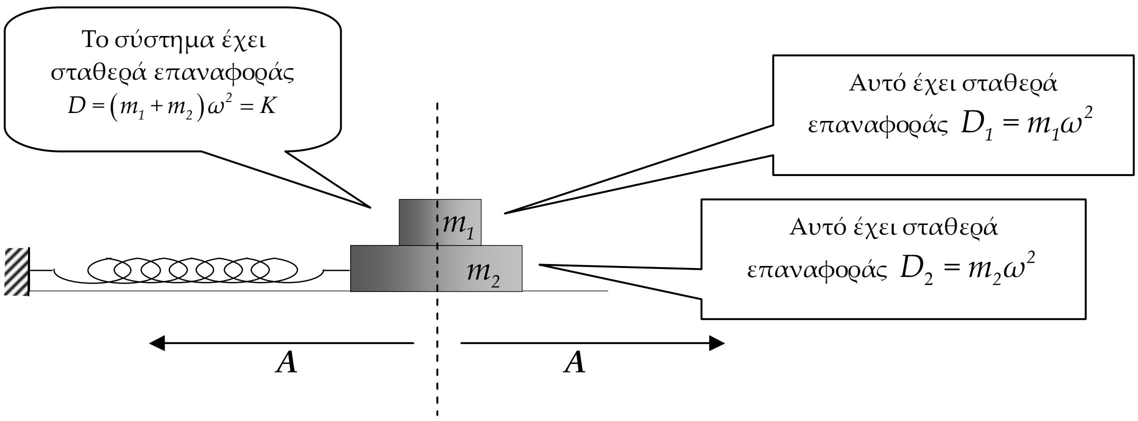
Όταν δύο σώματα m_1 και m_2 που βρίσκονται σε επαφή εκτελούν κοινή αρμονική ταλάντωση, τότε έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$), την οποία υπολογίζουμε θεωρώντας ότι έχουμε ένα σώμα μάζας $m = m_1 + m_2$. Το κάθε σώμα όμως έχει την δική του σταθερά επαναφοράς

$$D_1 = m_1\omega^2 \quad \text{και} \quad D_2 = m_2\omega^2$$

Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος θα είναι

$$D = (m_1 + m_2)\omega^2 = D_1 + D_2$$

Αν το σύστημα που εκτελεί την Α.Α.Τ. είναι δεμένο σε ελατήριο, τότε η σταθερά D του συστήματος θα είναι ίση με την σταθερά του ελατηρίου Κ (D=K).



***1η περίπτωση*:** Κίνηση σε κατακόρυφη διεύθυνση

<u>Βήμα 1</u>: Σχεδιάζουμε το σύστημα σε μια τυχαία θέση του στον θετικό ημιάξονα καθώς εκτελεί Α.Α.Τ. και σημειώνουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα μάζας *m*.

<u>Βήμα 2</u>: Γράφουμε για το σώμα που μας ενδιαφέρει (αυτό το οποίο

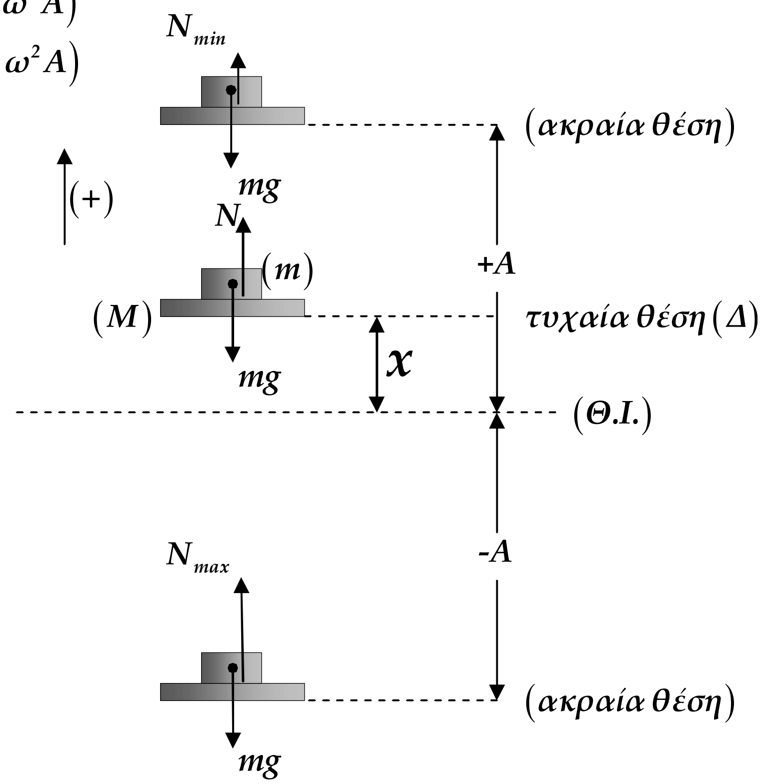
πρόκειται να χάσει την επαφή του) την συνθήκη της απλής αρμονικής ταλάντωσης:

$$\Sigma F_y = -m\omega^2 x \Rightarrow N - mg = -m\omega^2 x \Rightarrow \boxed{N = m\left(g - \omega^2 x\right)} \ \textbf{(\#)}$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει την τιμή της δύναμης επαφής που ασκείται στο σώμα που μας ενδιαφέρει. Η δύναμη αυτή έχει μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή. Μέγιστη για την περίπτωση όπου $x = -A$ και ελάχιστη για την περίπτωση όπου $x = +A$.

Θέση +Α: $\boldsymbol{N_{min} = m\left(g - \omega^2 A\right)}$

Θέση -Α: $\boldsymbol{N_{max} = m\left(g + \omega^2 A\right)}$



Όταν ζητείται να μην χάνεται η επαφή του σώματος μάζας m με το σώμα μάζας M πρέπει:

$$\boxed{N_{min} \geq 0} \overset{(\#)}{\Rightarrow}$$

$$m\left(g - \omega^2 A\right) \geq 0 \overset{m \neq 0}{\Rightarrow}$$

$$g - \omega^2 A \geq 0 \Rightarrow$$

$$g \geq \omega^2 A$$

Η τελευταία σχέση μας υπολογίζει την οριακή τιμή κάποιου από τα μεγέθη ω, T , f ή A που περιέχονται σε αυτή τη σχέση.

$\boldsymbol{2^{\eta}}$ ***περίπτωση*:** Κίνηση σε οριζόντια διεύθυνση

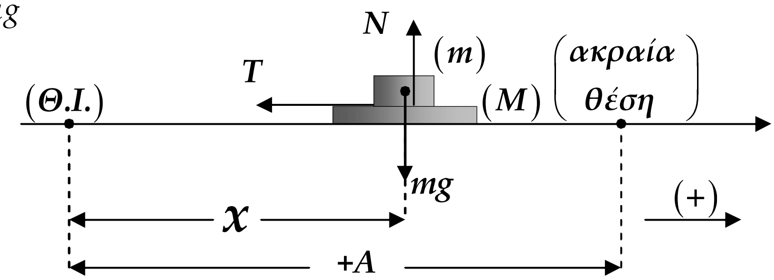
<u>Βήμα 1</u>: Στην τυχαία θέση σημειώνουμε τις δυνάμεις στο σώμα μάζας m και γράφουμε την αναγκαία συνθήκη ώστε να εκτελεί Α.Α.Τ.:

$$\Sigma F_x = -m\omega^2 x \Rightarrow -T = -m\omega^2 x \Rightarrow \boxed{T = m\omega^2 x} \ \textbf{(\#)}$$

<u>Βήμα 2</u>: Όταν μας ζητούν να μην συμβαίνει ολίσθηση του σώματος μάζας m πάνω στο άλλο σώμα μάζας M, θα πρέπει η τριβή Τ να είναι η στατική τριβή και να ισχύει η συνθήκη:

$$\left.\begin{array}{l} T_{\sigma\tau} \leq T_{o\lambda} \Rightarrow T \leq \mu N \overset{(\#)}{\Rightarrow} m\omega^2 x \leq \mu N \\ \\ \text{Αλλά} \ \ \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$m\omega^2 x \le \mu mg \Rightarrow \omega^2 x \le \mu g$



Η σχέση ισχύει για κάθε x, άρα και για x=A, οπότε:

$$\boxed{\omega^2 A \le \mu g}$$

Η τελευταία σχέση μας υπολογίζει την οριακή τιμή κάποιου από τα μεγέθη ω, T , f ή A που περιέχονται σε αυτή τη σχέση.

ΚΡΟΎΣΗ - ΤΑΛΑΝΤΩΣΗ

Α) *Ελαστική κρούση*

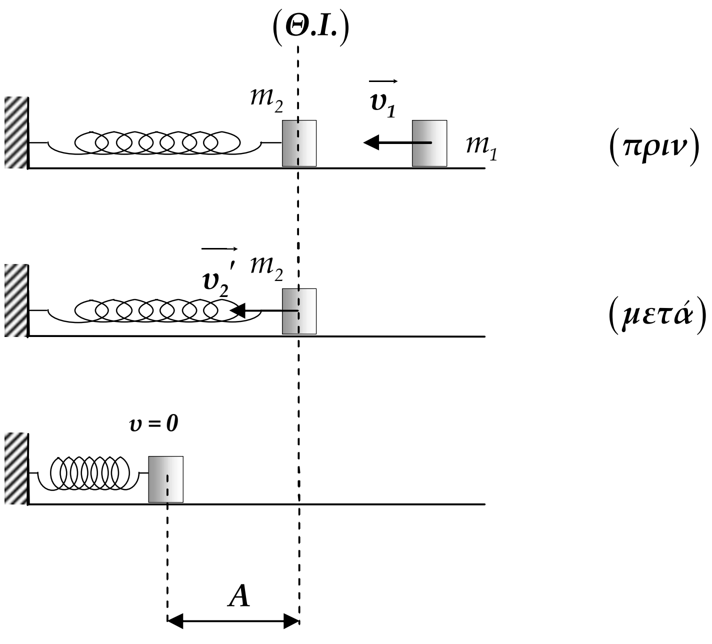
Ισχύει εκτός της **Α.Δ.Ο.** και η **Α.Δ.Κ.Ε.** (**Α**ρχή **Δ**ιατήρησης **Κ**ινητικής **Ε**νέργειας).

Προσοχή!!! Στην ελαστική κρούση δεν αλλάζουν:

1. η Θ.Ι. του ταλαντούμενου σώματος και
2. η περίοδος της ταλάντωσης

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

***$1^η$ περίπτωση*:** Το m_2 είναι αρχικά στη Θ.Ι. και είναι ακίνητο



Υπολογίζω την ταχύτητα του m_2 από τον τύπο $\upsilon_2' = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\upsilon_1$.

Επειδή η κρούση πραγματοποιείται στη Θ.Ι. θα είναι η μέγιστη ταχύτητα της ταλάντωσης που θα εκτελέσει έπειτα το m_2. Άρα:

$$\upsilon_{max} = \upsilon_2' \Rightarrow \omega \cdot A = \upsilon_2' \Rightarrow A = \frac{\upsilon_2'}{\omega}$$

2η περίπτωση: Το m_2 εκτελεί ήδη ταλάντωση και σε κάποια τυχαία θέση της τροχιάς του συγκρούεται με το m_1

Στην περίπτωση αυτή υπολογίζω από *Α.Δ.Ο.* και *Α.Δ.Κ.Ε.* την ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 μετά την κρούση.

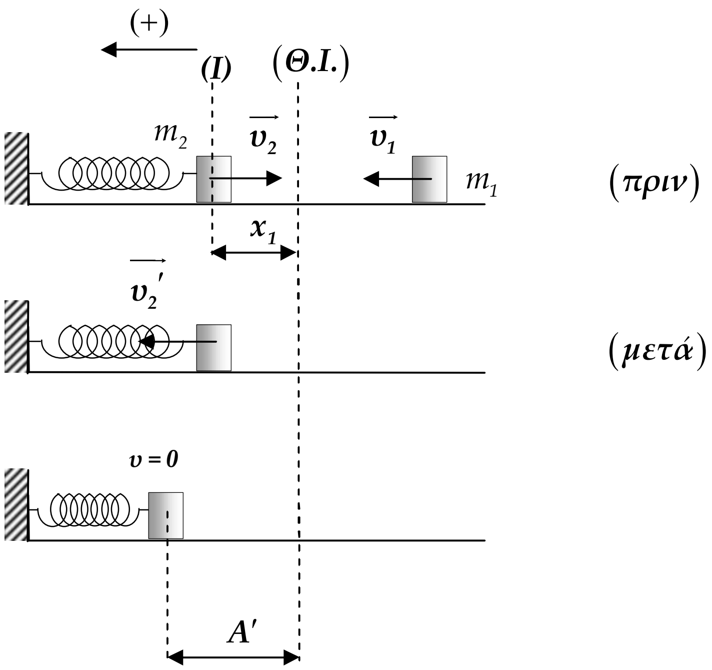
Α.Δ.Ο. : $\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Rightarrow \vec{p}_{1(αρχ)} + \vec{p}_{2(αρχ)} = \vec{p}_{1(τελ)} + \vec{p}_{2(τελ)} \Rightarrow$

$m_1 υ_1 - m_2 υ_2 = m_1 υ_1' + m_2 υ_2'$ **(1)**

Α.Δ.Κ.Ε. : $K_{ολ(αρχ)} = K_{ολ(τελ)} \Rightarrow K_{1(αρχ)} + K_{2(αρχ)} = K_{1(τελ)} + K_{2(τελ)} \Rightarrow$

$\frac{1}{2} m_1 υ_1^2 + \frac{1}{2} m_2 υ_2^2 = \frac{1}{2} m_1 υ_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 υ_2'^2$ **(2)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** υπολογίζουμε την ταχύτητα $υ_2'$.



Στη συνέχεια από *Α.Δ.Ε.Τ.* για την τυχαία θέση ***(Ι)*** υπολογίζουμε το νέο πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το m_2.

Α.Δ.Ε.Τ. : $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2} K \cdot A'^2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot υ_2'^2 + \frac{1}{2} K \cdot x_1^2 \Rightarrow A' = ...$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν η κρούση του m_2 με το m_1 γίνει στη Θ.Ι. και το m_2 έχει ταχύτητα όταν βρίσκεται εκεί, ισχύει ότι και στην περίπτωση 1, μόνο που η ταχύτητα του m_2 πριν την κρούση θα υπολογίζεται από *Α.Δ.Ο.* και *Α.Δ.Κ.Ε.* .

Β) *Πλαστική κρούση*

Όταν η κρούση είναι πλαστική ισχύει μόνο η **Α.Δ.Ο.**

- όταν η πλαστική κρούση πραγματοποιείται σε οριζόντιο επίπεδο, τότε <u>δεν έχουμε αλλαγή θέσης ισορροπίας</u>.

- όταν η πλαστική κρούση πραγματοποιείται σε κατακόρυφο ή πλάγιο επίπεδο, τότε η θέση ισορροπίας αλλάζει.
- η περίοδος της ταλάντωσης αλλάζει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

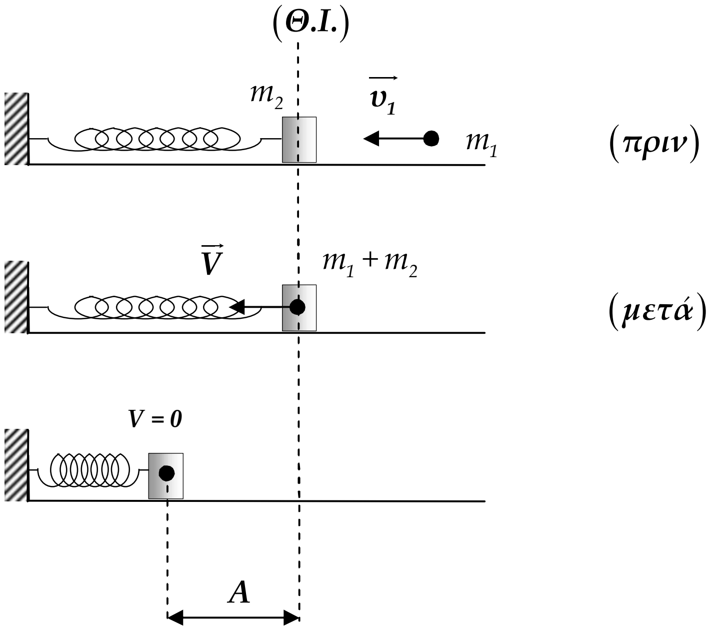
***1η περίπτωση*:** Βλήμα σφηνώνεται σε σώμα που βρίσκεται στη Θ.Ι. του και είναι αρχικά ακίνητο

Α.Δ.Ο. : $\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Rightarrow \vec{p}_{1(αρχ)} + \vec{p}_{2(αρχ)} = \vec{p}_{συσ(τελ)} \Rightarrow$

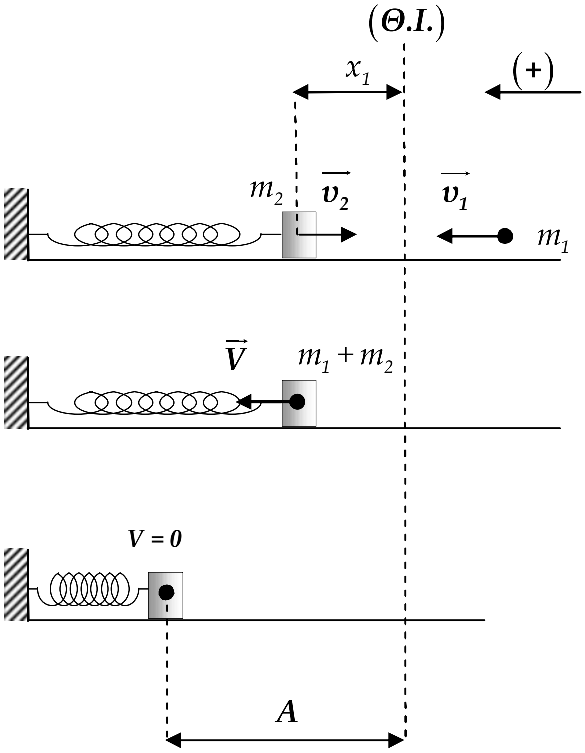
$$m_1 \upsilon_1 = \left(m_1 + m_2\right) V \Rightarrow \boxed{V = \frac{m_1 \upsilon_1}{m_1 + m_2}}$$

Η ταχύτητα αυτή θα αποτελεί την μέγιστη ταχύτητα του συσωματόματος για την ταλάντωση που θα εκτελέσει.

$$V = \upsilon_{max} \Rightarrow V = \omega \cdot A \Rightarrow A = \frac{V}{\omega}$$



$2^η$ *περίπτωση*: Η κρούση γίνεται σε τυχαία θέση της ταλάντωσης



Α.Δ.Ο. : $\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Rightarrow \vec{p}_{1(αρχ)} + \vec{p}_{2(αρχ)} = \vec{p}_{συσ(τελ)} \Rightarrow$

$$m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow \boxed{V = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}}$$

Α.Δ.Ε.Τ. : $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}K \cdot A^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot V^2 + \frac{1}{2}K \cdot x_1^2 \Rightarrow A = \ldots$

$3^η$ *περίπτωση*: Η Θ.Ι. αλλάζει

$$Θ.Ι.: ΣF_y = 0 \Rightarrow KΔ\ell = m_1 g \Rightarrow \boxed{Δ\ell = \frac{m_1 g}{K}} \quad (1)$$

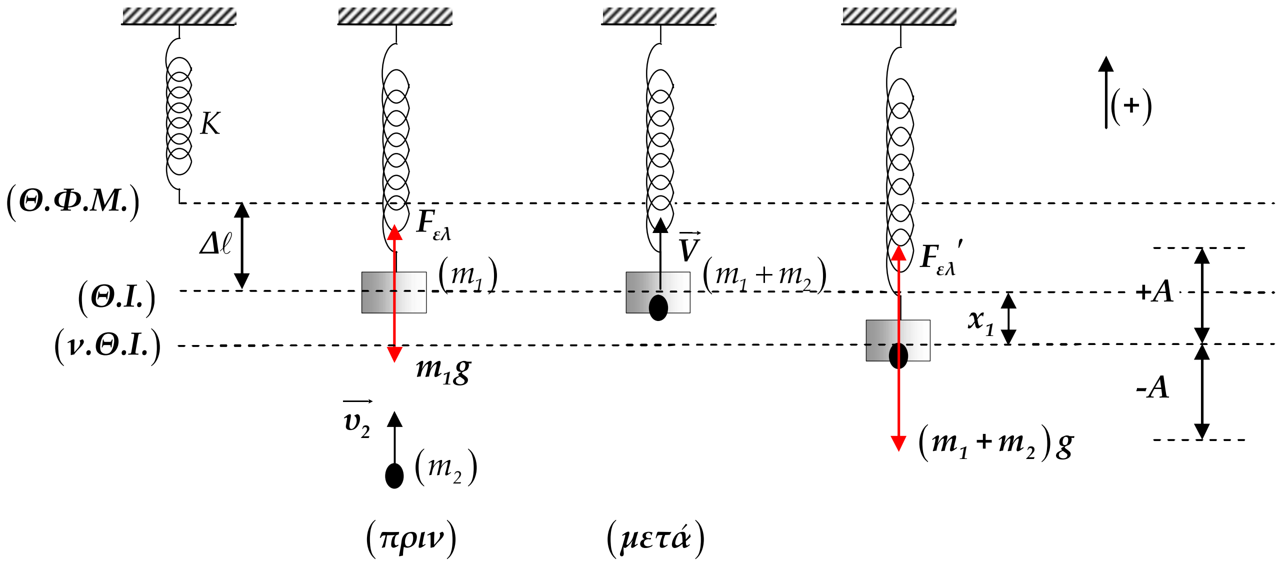
$$ν.Θ.Ι.: ΣF_y = 0 \Rightarrow K(Δl + x_1) = (m_1 + m_2)g \Rightarrow \cancel{KΔl} + Kx_1 = \cancel{m_1 g} + m_2 g \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{m_2 g}{K}} \quad (2)$$

Α.Δ.Ο. : $\vec{p}_{ολ(αρχ)} = \vec{p}_{ολ(τελ)} \Rightarrow \vec{p}_{1(αρχ)} + \vec{p}_{2(αρχ)} = \vec{p}_{συσ(τελ)} \Rightarrow$

$$m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow \boxed{V = \frac{m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}}$$

Α.Δ.Ε.Τ. : $E = K + U \Rightarrow \frac{1}{2}K \cdot A^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot V^2 + \frac{1}{2}K \cdot x_1^2 \Rightarrow A = \ldots$


K
(+)
(Θ.Φ.Μ.)
Δℓ
(Θ.Ι.)
(ν.Θ.Ι.)
$F_{ελ}$
(m_1)
$m_1 g$
$\vec{υ}_2$
(m_2)
$\vec{V}$
(m_1+m_2)
$F_{ελ}'$
x_1
$(m_1+m_2)g$
+A
-A
(πριν)
(μετά)