# ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΚΙΝΗΣΗΣ.

## ΚΙΝΗΣΗ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΑΣΤΑΣΗ.

### Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΟΥ $U(x) = -Ax^4$, ΜΕ $A > 0$

Για ένα σωματίδιο μάζας m, το οποίο κινείται σε μια διάσταση υπό την επίδραση δύναμης $F(x)$, έχοντας ολική ενέργεια Ε (που αποτελεί σταθερά της κίνησης), η διατήρηση της ενέργειας δίνει:

$$E = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + U(x) \tag{1}$$

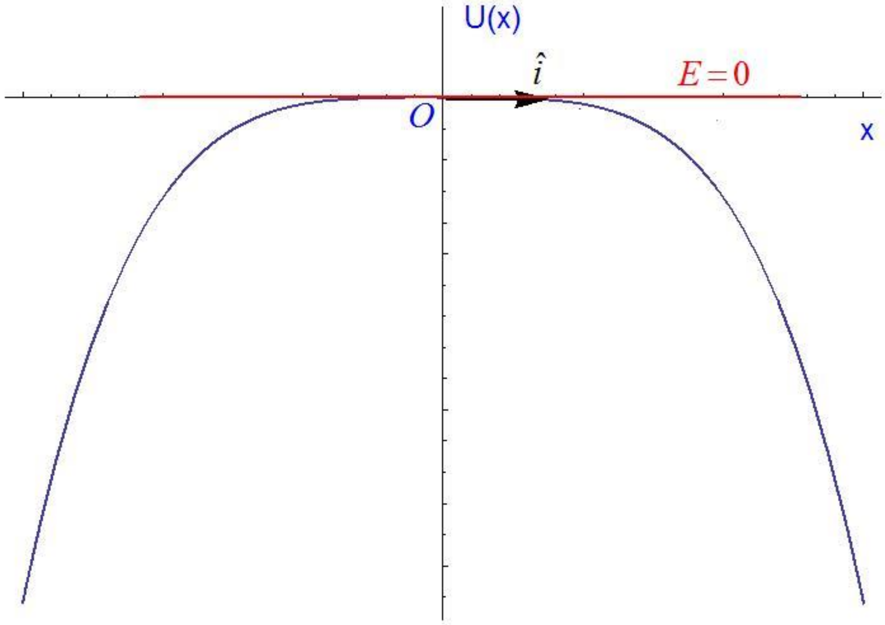
Στη σχέση (1), Ε είναι η ολική ενέργεια του σωματιδίου, $U(x)$ είναι η δυναμική του ενέργεια και $\dot{x}$ η ταχύτητά του. ($\dot{x} = \frac{dx}{dt}$).

Στα επόμενα θα θεωρήσουμε την περίπτωση ενός σωματιδίου που κινείται μέσα σε ένα δυναμικό της μορφής:

$$U(x) = -Ax^4 \quad \text{με} \quad A > 0 \tag{2}$$

Θα θεωρήσουμε επίσης ως δεδομένο ότι η ολική ενέργεια του σωματιδίου κατά την κίνησή του στο εν λόγω δυναμικό είναι ίση με μηδέν.

Στο παρακάτω σχήμα 1, φαίνεται η γραφική παράσταση του θεωρούμενου δυναμικού.




Σχήμα 1: Το δυναμικό $U(x) = -Ax^4$ με $A > 0$

Από τη διατήρηση λοιπόν της ενέργειας θα έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) \qquad \text{ή}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - Ax^4 = 0 \qquad \text{ή}$$

$$(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{2A}{m}x^4 \qquad \text{ή}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2A}{m}}x^2 \qquad (3)$$

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $x_0$, με $x_0 > 0$. Στο σωματίδιο θα ασκηθεί δύναμη της μορφής:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}\hat{i} = -\frac{d}{dx}(-Ax^4)\hat{i} = 4Ax^3\hat{i} \tag{4}$$

Το $\hat{i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στο x-άξονα. Έτσι λοιπόν το σώμα θα δεχθεί δύναμη στην κατεύθυνση του $\hat{i}$. Προκειμένου να περιγράψουμε την κίνησή του, πρέπει να γνωρίζουμε την κατεύθυνση της αρχικής του ταχύτητας (Δηλαδή το πρόσημο της ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$). Διακρίνουμε λοιπόν δύο περιπτώσεις:

<u>Πρώτη περίπτωση:</u> Η αρχική ταχύτητα είναι αρνητική, δηλαδή $\frac{dx}{dt} < 0$ (στο σωματίδιο θα ασκηθεί δύναμη αντίρροπη προς την αρχική του ταχύτητα).

<u>Δεύτερη περίπτωση</u>: Η αρχική ταχύτητα είναι θετική, δηλαδή $\frac{dx}{dt} > 0$ (στο σωματίδιο λοιπόν θα ασκηθεί δύναμη ομόρροπη με την αρχική του ταχύτητα).

Ας δούμε λοιπόν στη συνέχεια τις δύο αυτές περιπτώσεις.

<u>Πρώτη περίπτωση</u>

Είναι: $\frac{dx}{dt} < 0$, οπότε στη σχέση (3) «επιλέγουμε» το αρνητικό πρόσημο και έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2A}{m}}x^2 \qquad \text{ή}$$

$$dt = -\sqrt{\frac{m}{2A}}\frac{1}{x^2}dx$$ ή

$$t = \sqrt{\frac{m}{2A}}\frac{1}{x} + C \qquad (5)$$

Προκειμένου να προσδιορίσουμε τη σταθερά , θα κάνουμε χρήση της αρχικής μας συνθήκης: τη χρονική στιμή $t_0 = 0$, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $x_0$ (με $x_0 > 0$). Θα έχουμε:

$$\sqrt{\frac{m}{2A}}\frac{1}{x_0} + C = 0$$ ή

$$C = -\sqrt{\frac{m}{2A}}\frac{1}{x_0} \qquad (6)$$

Από τις (5) και (6) λοιπόν έχουμε:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2A}}\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{m}{2A}}\frac{1}{x_0}$$ ή

$$\sqrt{\frac{2A}{m}}t = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$$ ή

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} + \sqrt{\frac{2A}{m}}t$$ ή

$$\frac{1}{x} = \frac{1 + \sqrt{\frac{2A}{m}}x_0 t}{x_0}$$ ή

$$x = \frac{x_0}{1 + \sqrt{\frac{2A}{m}}x_0 t} \qquad (7)$$

Από τη σχέση (7), βλέπουμε ότι στην περίπτωσή μας το σωματίδιο τείνει ασυμτωτικά στο 0. (Ο παρονομαστής τείνει στο άπειρο καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο).

## Δεύτερη περίπτωση

Είναι: $\frac{dx}{dt} > 0$, οπότε στη σχέση (3) «επιλέγουμε» το θετικό πρόσημο και έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2A}{m}} x^2$$ ή

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2A}} \frac{1}{x^2} dx$$ ή

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2A}} \frac{1}{x} + D \qquad (8)$$

Μέσω της αρχικής μας συνθήκης, προσδιορίζουμε τη σταθερά $D$:

$$D = \sqrt{\frac{m}{2A}} \frac{1}{x_0} \qquad (9)$$

Έτσι λοιπόν μέσω των σχέσεων (8) και (9) έχουμε διαδοχικά:

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2A}} \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{m}{2A}} \frac{1}{x_0}$$ ή

$$\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{2A}{m}} t$$ ή

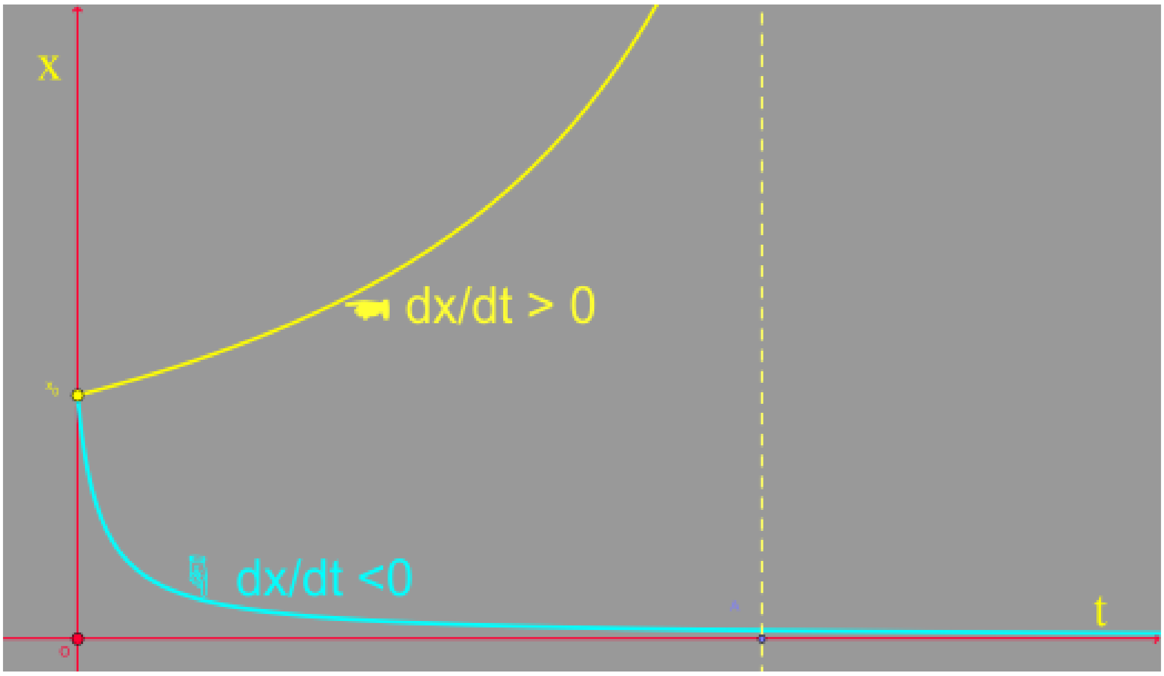
$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x_0}-\sqrt{\frac{2A}{m}}t$$ ή

$$\frac{1}{x}=\frac{1-\sqrt{\frac{2A}{m}}x_0 t}{x_0}$$ ή

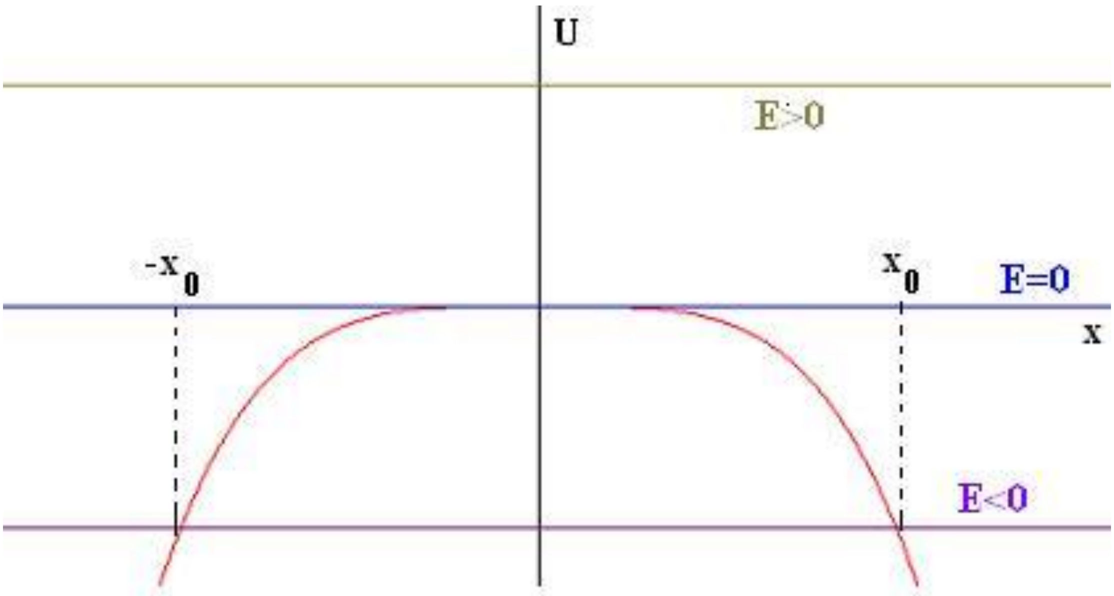
$$x=\frac{x_0}{1-\sqrt{\frac{2A}{m}}x_0 t} \qquad (10)$$

Στη σχέση (10) παρατηρούμε ότι καθώς $t \to \sqrt{\frac{m}{2A}}\frac{1}{x_0}$, ο παρονομαστής τείνει στο μηδέν και το κλάσμα τείνει στο άπειρο. <u>Δηλαδή το σωματίδιο φτάνει στο άπειρο σε χρόνο</u> $\sqrt{\frac{m}{2A}}\frac{1}{x_0}$. Φυσικά αυτό συμβαίνει γιατί θεωρούμε ότι το δυναμικό επεκτείνεται στο άπειρο. Στον πραγματικό όμως κόσμο, το δυναμικό θα έχει «πεπερασμένη έκταση». Ακόμα κι έτσι το «πρόβλημα», έστω και θεωρητικό, παραμένει. Όμως δεν πρέπει να μας διαφεύγει το γεγονός ότι καθώς η ταχύτητα του σωματιδίου αυξάνει συνέχεια, από κάποια στιγμή και έπειτα (ας πούμε όταν η ταχύτητα γίνει ίση με πχ το 10% της ταχύτητας του φωτός) είμαστε υποχρεωμένοι να εφαρμόσουμε «σχετικιστική» μηχανική. Τότε πλέον η ταχύτητα έχει ανώτατο όριο (την ταχύτητα του φωτός).

Παρακάτω παρατίθεται η όμορφη γραφική παράσταση, από τον συνάδελφο και φίλο **Γιάννη Δογραματζάκη**, τον οποίο θερμά ευχαριστώ!




Επίσης, μια ποιοτική περιγραφή όλων των δυνατών περιπτώσεων, που καθιστά πιο ολοκληρωμένη την παρούσα εργασία από τον συνάδελφο και φίλο **Ευάγγελο Κορφιάτη**, τον οποίο και θερμά ευχαριστώ!



## Αν η ολική ενέργεια είναι θετική

τότε το σώμα μπορεί να κινείται από το -∞ έως το +∞.

Αν λοιπόν σε οποιαδήποτε θέση έχει θετική ταχύτητα θα κινηθεί μέχρι το +∞.

Αν έχει αρνητική ταχύτητα θα κινηθεί μέχρι το -∞.

## Αν η ολική ενέργεια είναι αρνητική

Τότε το σώμα μπορεί να κινείται από -∞ έως $-x_0$ ή από $x_0$ έως +∞.

Αν σε μια θέση $x<-x_0$ έχει $υ>0$ τότε θα κινηθεί μέχρι το $-x_0$ και στην συνέχεια θα κινηθεί μέχρι το -∞.

Αν σε μια θέση $x<-x_0$ έχει $υ<0$ τότε θα κινηθεί μέχρι το -∞.

Αν σε μια θέση $x>x_0$ έχει $υ<0$ τότε θα κινηθεί μέχρι το $x_0$ και στην συνέχεια θα φύγει για +∞.

Αν σε μια θέση $x>x_0$ έχει $υ>0$ τότε θα κινηθεί μέχρι το +∞.

## Αν η ολική ενέργεια είναι μηδέν

Τότε το σώμα μπορεί να κινείται από -∞ έως 0 ή από 0 έως +∞.

Αν σε μια θέση $x<0$ έχει $υ>0$ τότε θα κινηθεί μέχρι το 0 και θα σταματήσει ( έκπληξη είναι ότι αυτό γίνεται σε άπειρο χρονικό διάστημα).

Αν σε μια θέση $x<0$ έχει $υ<0$ τότε θα κινηθεί μέχρι το -∞.

Αν σε μια θέση $x>0$ έχει $υ<0$ τότε θα κινηθεί μέχρι το 0 και θα σταματήσει.

Αν σε μια θέση $x>0$ έχει $υ>0$ τότε θα κινηθεί μέχρι το +∞.

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2013

ΦΙΟΡΕΝΤΙΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗ